01/04/2021 - *Terzo Compitino Geometria (corso A)*

Parte I (max 24 punti). *Per ogni quesito riempire con il risultato la pagina adibita a ricevere le risposte.*

1. Consideriamo il prodotto scalare ϕ di $\mathbb{R}^3$ definito da

   $\phi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2+x_1y_2+x_1z_2+y_1x_2+y_1z_2+z_1x_2+z_1y_2+z_1z_2$:

   a) Scrivere in base canonica la matrice associata a ϕ.

   b) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a ϕ.

   c) Determinare la segnatura di ϕ.

   d) E' possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ composta da vettori isotropi per ϕ? Trovare una tale base oppure spiegare perchè non esiste.

2. Rispondere alle seguenti domande:

   a) Riempire la terza colonna della matrice

   $$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \cdots \end{pmatrix},$$

   in modo che A risulti essere una matrice ortogonale con determinante 1.

   b) Giustificando brevemente la risposta, dire se la matrice A trovata al punto precedente risulta corrispondere ad una *rotazione* rispetto ad una asse, ad una *riflessione* rispetto ad un piano, oppure ad una *proiezione* su un piano in $\mathbb{R}^3$.

3. Considerato un endomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ simmetrico rispetto al prodotto canonico $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dire se le seguenti affermazioni sono sempre vere, motivando brevemente la riposta:

   a) Se tutti gli autovalori di f sono strettamente positivi, allora per ogni vettore $\underline{v}$ non nullo si ha $\langle \underline{v}, f(\underline{v}) \rangle > 0$.

   b) Se $\|\underline{v}\| = 1$, allora $\langle \underline{v}, f(\underline{v}) \rangle$ non può essere più piccolo del minimo autovalore di f.

4. Rispondere alle seguenti domande:

   a) Considerata la base $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \}$ di $\mathbb{C}^2$, scrivere in base canonica la matrice del prodotto hermitiano ϕ che ha B come base ortonormale.

   b) Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{C}^2$ che, in base canonica, ha matrice associata $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Motivando brevemente la risposta, dire se f è unitario rispetto al prodotto hermitiano canonico.

   c) Motivando brevemente la risposta, dire se l'endomorfismo f definito in (b) è unitario rispetto al prodotto hermitiano ϕ trovato al punto (a).

Parte II (max 12 punti). *Giustificare la risposta in un foglio: dopo aver scritto su carta la soluzione in maniera ordinata, farne la foto e caricarla sul form.*

Esercizio. Svolgere i seguenti punti:

1. Consideriamo la matrice

$$A_t = \begin{bmatrix} 16t+9 & 0 & 12t-12 \\ 0 & 25 & 0 \\ 12t-12 & 0 & 9t+16 \end{bmatrix}$$

   dipendente da un parametro reale t. Determinare una base ortonormale di autovettori per A_t, deducendo che le A_t sono simultaneamente diagonalizzabili tramite una similitudine data da una matrice ortogonale.

2. Dato V, φ spazio euclideo reale, siano f e g operatori simmetrici. Dimostrare che:

   $g \circ f$ è simmetrico $\iff$ $g \circ f = f \circ g$ $\iff$ $\exists$ base ortonormale di autovettori comuni ad f e a g.

3. Sia W sottospazio di V e siano $pr_W : V \to V$ e $\rho_W : V \to V$ rispettivamente la proiezione ortogonale su W e la riflessione ortogonale rispetto a W (ricordiamo che $V = W \oplus W^\perp$ e si definisce $pr_W(\underline{w} + \underline{w'}) = \underline{w}$ e $\rho_W(\underline{w} + \underline{w'}) = \underline{w} - \underline{w'}$, $\underline{w} \in W$, $\underline{w'} \in W^\perp$). Mostrare che gli operatori simmetrici che commutano con la proiezione pr_W – come anche quelli che commutano con la riflessione ρ_W – sono tutti e soli quegli operatori simmetrici per cui W (e quindi $W^\perp$) è invariante.