24/01/2020 - *Scritto Geometria (corso A)*

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

Parte I . *Per ogni quesito spuntare la casella o riempire col risultato (dove richiesto)*

1. Dati i tre piani $\pi_1 : x + 2y + z = 6$, $\pi_2 : x + y - 2z = 2$ e $\pi_3 : x + 3y + 4z = k$, trovare – se esistono – i valori del parametro reale k per cui π_1, π_2, π_3

   (a) non si intersecano: ....

   (b) si intersecano in esattamente un punto: ....

   (c) si intersecano in una retta: .... avente la seguente equazione parametrica

   $$(x, y, z) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alle basi canoniche è data da $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Scrivere la matrice di f rispetto alla base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in partenza e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in arrivo: $\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, calcolare il determinante .... della matrice:

   $$\begin{pmatrix} 0 & t & t & t & t \\ t & t & t & 0 & t \\ t & t & 0 & t & t \\ t & 0 & t & t & t \\ t & t & t & t & 0 \end{pmatrix}$$

4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k-2 & 3 & 0 \\ k^2 - 2k & k-1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, stabilire

   per quali valori del parametro reale k .... la matrice A risulta essere simile a B.

5. Data la matrice $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, elencare qui di seguito gli autovalori di A con le loro molteplicità geometriche:

Autovalore	Molteplicità geometrica

Fornire una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ fatta da autovettori dell'endomorfismo $f_A(\underline{v}) = A\underline{v}$:

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Indicare qui sotto un'equazione cartesiana per il sottospazio $\mathrm{Im}(f_A)$:

. . . .

6. Calcolare la segnatura $(i_+, i_-, i_0) =$ . . . . del prodotto scalare di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rispetto alla base canonica è $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Scrivere una base del radicale $V^{\perp}$:

. . . .

==

Parte II – si giustifichino in dettaglio su un foglio tutte le risposte
Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e sia $N : V \to V$ un'applicazione lineare nilpotente, ovvero tale che esiste $k \geq 1$ per cui $N^k = 0$.

1. Dimostrare che l'unico autovalore (complesso) di N è 0.

2. Dedurne che l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V \\ v & \mapsto & \lambda v - N(v) \end{array}$$

   è invertibile se e solo se $\lambda \neq 0$.

3. Supponiamo ora che V sia munito di un prodotto scalare definito positivo (denotato $\langle \cdot, \cdot \rangle$) e che l'identità

$$\langle Nv, w \rangle = \langle v, Nw \rangle$$

   valga per ogni scelta di $v, w \in V$. Dimostrare che $N = 0$.

4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_6$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al massimo 6 e sia $d : V \to V$ l'applicazione lineare derivata (ovvero $d(p(x)) = p'(x)$). Calcolare, se esiste, $(\mathrm{Id} - d)^{-1}(x^6)$.

5. Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, definiamo $\|A\|$ come la somma dei quadrati dei suoi coefficienti. Dimostrare che esiste una successione di basi $\mathcal{B}_n$ di $V = \mathbb{R}[x]_6$ con la seguente proprietà: detta D_n la matrice di d rispetto alla base $\mathcal{B}_n$, la successione $\|D_n\|$ tende a 0 quando $n \to \infty$.