11/06/2022 - *Secondo scritto di Geometria (corso A)*

Cognome e matricola ______________________________

Parte I. *Riempire con le risposte. Per l'esame da 9 cfu, gli studenti possono non svolgere la domanda (???).*

1. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo la retta $r = \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$ ed il punto $P = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

   a) Dare un'equazione cartesiana per il piano π contenente r e P ______________________________

   b) Detti $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(\underline{v}_1) = \underline{v}_2$, $f(\underline{v}_2) = \underline{v}_1$ e $f(\underline{v}_3) = \underline{v}_3$. Dire se π è f-invariante .... e scrivere la matrice di f in base canonica $\begin{pmatrix}..... & ..... & .....\\ ..... & ..... & .....\\ ..... & ..... & .....\end{pmatrix}$

   c) Dire se f è ortogonale ripsetto al prodotto canonico di $\mathbb{R}^3$ .... e, in tale caso, specificare se e perchè si tratta o meno di una rotazione

   ____

   d) Dire se f è simmetrico ripsetto al prodotto canonico di $\mathbb{R}^3$ .... e, in tale caso, determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ fatta da autovettori per f

   ____

2. Sia $q(x) = x(x-1)^2$.

   a) Quanto vale il determinante di una matrice che ha polinomio caratteristico uguale a $-q(x)$? Giustificare la risposta:

   ____

   b) Scrivere una matrice 3×3 reale con polinomio minimo uguale a $q(x)$: $\begin{pmatrix}..... & ..... & .....\\ ..... & ..... & .....\\ ..... & ..... & .....\end{pmatrix}$

3. Sia φ il prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ tale che $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1 + x_3)y_1 + (x_2 + x_3)y_2 + (x_1 + x_2 - x_3)y_3$

   a) Scrivere in base canonica la matrice di φ $\begin{pmatrix}..... & ..... & .....\\ ..... & ..... & .....\\ ..... & ..... & .....\end{pmatrix}$

   b) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a φ

   ____

   c) Calcolare la segnatura $(\iota_+, \iota_-, \iota_0)$ di φ ______________________________

   d) Dire se e perchè può esistere o meno una base di $\mathbb{R}^3$ fatta interamente da vettori isotropi rispetto a φ

   ____

   ____

Parte II. *Giustificare la risposta in un foglio. Per l'esame da 9 cfu, gli studenti possono non svolgere il punto (???).*

Esercizio. SIano $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrici hermitiane.

1. Dimostrare che la matrice $i[A, B]$ è hermitiana, dove $i \in \mathbb{C}$ è l'unità immaginaria e $[A, B] = AB - BA$.
2. Sia $<\underline{x}, \underline{y}>= \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$ il prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$. Dimostrare che, $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ si ha:
$$\Im(< A\underline{x}, B\underline{x} >) \ = \ -\frac{1}{2} < \underline{x}, i[A, B]\underline{x} >$$
dove $\Im(z)$ è la parte immaginaria di z
[osservare che $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ e che si ha $\overline{< A\underline{x}, B\underline{x} >} =< B\underline{x}, A\underline{x} >$. Usare anche che A e B sono hermitiane e quindi si possono spostare da una parte all'altra nel prodotto hermitiano canonico].
3. Assunta la disuguaglianza di Schwartz
$$|< \underline{x}, \underline{y} >|^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n,$$
dimostrare che
$$\|A\underline{x}\|^2 \|B\underline{x}\|^2 \geq \frac{1}{4}\ |< \underline{x}, [A, B]\underline{x} >|^2$$
4. Dedurre il "principio di indeterminazione"
$$V_{\underline{x}}(A)V_{\underline{x}}(B) \geq \frac{1}{4}\ |< \underline{x}, [A, B]\underline{x} >|^2$$
dove $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ è un vettore unitario e per ogni matrice hermitiana A si pone
$$V_{\underline{x}}(A) =< \underline{x}, A^2\underline{x} > \ - (< \underline{x}, A\underline{x} >)^2.$$