**18/05/2022** - *Primo scritto di Geometria (corso A)*

Cognome e matricola ________________________________________

**Parte I**. *Riempire con le risposte. Per l'esame da 9 cfu, gli studenti sono esentati dallo svolgere la domanda (???).*

1. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo il piano $\pi : x + y + z = 0$ e la retta $r = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

   a) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus r$. ____________________

   b) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la dimensione di $\{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) : f(\pi) \subseteq \pi \text{ e } f(r_\alpha) \subseteq r_\alpha\}$.

   ________________________________________

2. Sia $A$ una generica matrice $m \times n$ a coefficienti n $\mathbb{R}$ e consideriamo $M = A^t \cdot A$.

   a) $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(A)$? SI NO Perchè? ____________________

   ________________________________________

   b) $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Im}(A^t)$? SI NO Perchè? ____________________

   ________________________________________

   c) Gli autovalori di $M$ sono reali? SI NO Perchè? E di che segno? ____________________

   ________________________________________

3. Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}_2[x]$ tale che $f(a + bx + cx^2) = a - 2b - c - (a + 3b + c)x^2 - (a + 4b)x^2$.

   a) Scrivere la matrice di $f$ rispetto alla base $B = \{1, x + x^2, x^2\}$: $\begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$

   b) 1 è autovalore per $f$? SI NO Se sì, trovare una base per il suo autospazio. ____________________

   c) $f$ è diagonalizzabile? SI NO Perchè? ____________________

   ________________________________________

4. Sia $\varphi$ il prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ che, in base canonica, ha matrice $\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, dove $k$ è un parametro reale.

   a) Calcolare la segnatura $(\iota_+, \iota_-, \iota_0)$ di $\varphi_{|\mathrm{Span}\{\underline{e}_2\underline{e}_3\}}$ ____________________

   b) Calcolare la segnatura $(\iota_+, \iota_-, \iota_0)$ di $\varphi$ al variare di $k$ ____________________

   c) Per $k = 1$ trovare un vettore isotropo ____________________

**Parte II**. *Giustificare la risposta in un foglio. Per l'esame da 9 cfu, gli studenti sono esentati dallo svolgere il punto (???).*

**Esercizio 1.** Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale. Per ogni autovalore reale $\lambda \in \mathbb{R}$ di $f$, consideriamo l'autospazio relativo

$$V_\lambda = Ker(f - \lambda \cdot id)$$

(qui $id$ è l'identità di $V$), e il sottospazio di $V$

$$W_\lambda = Im(f - \lambda \cdot id).$$

(1) Se $V = \mathbb{R}^2$ e $f$ è dato dalla moltiplicazione per la matrice $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ allora dimostrare che $dim(V_\lambda \cap W_\lambda) > 0$ trovando una base di $V_\lambda \cap W_\lambda$.

(2) In generale, dimostrare che se $f$ è diagonalizzabile con autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ allora per ogni $\lambda_i$ il sottospazio $W_{\lambda_i}$ è la somma di tutti gli autospazi diversi da $V_{\lambda_i}$ [si può considerare una base di autovettori e la matrice diagonale associata...; oppure per ogni vettore $\underline{v} \in V$ scrivere $\underline{v} = \underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_k$ come somma di autovettori relativi a autovalori distinti e osservare che $f(\underline{v}) - \lambda_i \cdot \underline{v}$ sta in ...]. Dedurre che in questo caso $V_{\lambda_i} \cap W_{\lambda_i} = \{\underline{0}\}$.

(3) Sia $\varphi > 0$ un prodotto scalare definito positivo su $V$. Dedurre dal punto (2) e dal teorema spettrale che se $f$ è simmetrico allora $W_\lambda = (V_\lambda)^\perp$ per ogni autovalore $\lambda$.

(4) Nelle stesse ipotesi di (3), dedurre le stesse conclusioni di (3) nel caso in cui $f$ è ortogonale e $\lambda$ è un autovalore reale.