Lezione del 10/10/2013

www.dm.unipi.it/~salvetti/didattica/
/Geometria 1 (Fisica)

Lang,
Abeasis, Abate, Ciliberto

Ricordiamo: V con operazione $+ : V \times V \longrightarrow V$
e prodotto esterno $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$

si dice spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ se valgono

1) $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w}) \quad \forall\, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$

2) $\exists$ vettore nullo $\underline{0}$ t.c. $\underline{0}+\underline{v} = \underline{v}+\underline{0} = \underline{v}, \ \forall \underline{v} \in V$

3) $\forall\, \underline{v} \in V, \ \exists\, \underline{w} \in V$ t.c. $\underline{v}+\underline{w} = \underline{w}+\underline{v} = \underline{0}$

4) $\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V \quad \underline{v}+\underline{w} = \underline{w}+\underline{v}$

[GRUPPO COMMUTATIVO]

---

e INOLTRE

5. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall\, \underline{v} \in V$

$(\alpha+\beta)\,\underline{v} = \alpha\,\underline{v} + \beta\,\underline{v}$; $(\alpha\beta)\,\underline{v} = \alpha(\beta\,\underline{v})$

6. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$

$\alpha(\underline{v}+\underline{w}) = \alpha\,\underline{v} + \alpha\,\underline{w}$

7. $\forall\, \underline{v} \in V$ si ha $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$

($1 \in \mathbb{K}$ è l'identità moltiplicativa).

ESEMPI

1. vettori geometrici: già visto

con $\underline{v} + \underline{w}$ regola del parallelogramma

$\alpha \underline{v}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{v}$ vettore

---

2. $V = \mathbb{R}$, con $+$ è la somma di numeri

prodotto esterno è dato dal prodotto di numeri. V è uno sp. vett. su $\mathbb{R}$

es. verificare tutti gli assiomi

$$V = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

solita somma

$$(x, y) + (x', y') \overset{\text{def}}{=} (x + x', y + y')$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{v} = (x, y)$ definisco

$$\alpha \underline{v} = (\alpha x, \alpha y)$$

<u>esercizio</u>: verificare tutti gli assiomi

$\underline{v} = (x, y)$ l'opposto è: $(-x, -y)$

$\underline{0} = (0, 0)$ el. neutro

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\}$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (x_1', \dots, x_n') \overset{def}{=} (x_1 + x_1', \dots, x_n + x_n')$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

$\underline{es}$. $\underline{v} = (-2, 1, 0, 3)$ $\qquad \underline{w} = (0, 5, 1, 1)$

$\alpha = -2$

$\underline{v} + \underline{w} = (-2, 6, 1, 4)$ $\qquad \alpha \underline{v} = (4, -2, 0, -6)$

$\underline{es}$: verificare gli assiomi

$\underline{0} = (0, \dots, 0)$ elem. neutro

$$\mathbb{C}^n = \{ (z_1, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C} \}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad (z_1, \dots, z_n) + (z'_1, \dots, z'_n) =$

$$= (z_1 + z'_1, \dots, z_n + z'_n)$$

$\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad \alpha (z_1, \dots, z_n) = (\alpha z_1, \dots, \alpha z_n)$

$$\mathbb{K}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \dots, n \}$$

è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

$V = \mathbb{C}$ è sp. vett. su $\mathbb{C}$

è sp. vett. su $\mathbb{R}$? sì:

$z + z'$ è la solita somma

αz , $\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

---

gli assiomi rimangono validi e quindi

$\mathbb{C}$ è anche sp. vett. su $\mathbb{R}$

Polinomi a coeff. in un campo $\mathbb{K}$

$$V = \mathbb{K}[X] = \{ a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \mid a_i \in \mathbb{K} \}$$

$\mathbb{R}[X]$

$\mathbb{C}[X]$

es. $(3+i) - 2z + (1+i) z^3$

polinomi di grado 3 a coeff. in $\mathbb{C}$

$$(2 + 5X - X^3) + (X - 7X^5) =$$

$$= 2 + 6X - X^3 - 7X^5$$

$$(a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n) + (b_1 + b_2 X + \dots + b_m X^m) =$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) X + (a_2 + b_2) X^2 + \dots$$

$\alpha \in \mathbb{K}$, $\quad \alpha (a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n) \overset{def}{=}$

$$(\alpha a_0) + (\alpha a_1) X + \dots + (\alpha a_n) X^n$$

<u>verifica</u>: è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

$\mathbb{R}[X]$ è sp. vett su $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}[X]$ è sp. vett. su $\mathbb{C}$

$\mathbb{R}_n[X] = \{ p(X) \mid \text{grado di } p \leq n \}$

$\left(\{ p(X) \mid \text{grado } p = n \} \right.$ n fissato

NON È spazio vettoriale $\left. \right)$

oss. $\text{grado}(p(X) + q(X)) \leq \max\{ \text{gr}(p(X)), \text{gr}(q(X)) \}$

$\mathbb{R}_n[X]$ è spazio vett. su $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}_n[X]$ " $\mathbb{C}$

$$V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$$

$f + g$ è la funzione definita da:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

prodotto esterno: αf è la funzione $(\alpha \in \mathbb{R})$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

---

valgono tutti gli assiomi.

(esempio: associatività)

$$(f+g)+h = f+(g+h)$$

devo verificare che

$$[(f+g)+h](x) = [f+(g+h)](x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccc} [(f+g)+h](x) & = & [f+(g+h)](x) \\ \| & & \| \\ (f+g)(x)+h(x) & & f(x)+(g+h)(x) \\ \| & & \| \\ f(x)+g(x)+h(x) & = & f(x)+g(x)+h(x) \end{array}$$

$V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ è sp. vett. su $\mathbb{R}$

$W = \{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \}$ è sp. vett. su $\mathbb{C}$

S un insieme qualunque. $\mathbb{K}$ campo

$$V = \{ f : S \to \mathbb{K} \}$$

---

es $S = \{1, 2, 3\}$ $V = \{ f : \{1,2,3\} \to \mathbb{R} \}$

---

es $S = [0,1] \subset \mathbb{R}$

$$V = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \}$$

V è spazio vett. su $\mathbb{K}$

$+ : \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in S$

$\cdot \quad (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x) \qquad$ "

---

si verificano subito tutti gli assiomi

---

el. neutro : le funzioni $\qquad V = \{ f : S \to \mathbb{K} \}$

$\underline{0}(x) = 0 \in \mathbb{K} \quad , \forall x \in S$

opposto di f : $\qquad (-f)(x) \overset{\uparrow}{=} -f(x) \quad , \forall x \in S$

def

$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

matrice 2×2 è una tabella con 2 righe e 2 colonne

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{K}$$

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \qquad \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \qquad \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

$$M_1 + M_2 \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}$$

$$\alpha \in \mathbb{K} \quad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \alpha M \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$$

$M_2(\mathbb{K})$ è sp. vett. su $\mathbb{K}$

$$M_3(\mathbb{K}) \qquad M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad a, b, \dots \in \mathbb{K}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

altra notazione di

$$M = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \qquad M' = (a'_{ij})_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}}$$

def

$$M + M' = (a_{ij} + a'_{ij})_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \qquad \alpha M = (\alpha a_{ij})$$

$M_3(\mathbb{K})$ è sp. vett. su $\mathbb{K}$.

$$M_{r,s}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} \end{bmatrix} \right\} \quad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

$+$ e prodotto esterno è come prima

$$M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,s}} \qquad M' = (a'_{ij})_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,s}}$$

$$M + M' = \left(a_{ij} + a'_{ij} \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,s}}$$

<u>Sottospazio vettoriale</u>

Sia V uno sp. vett. su $\mathbb{K}$.

Un sottoinsieme $W \subset V$ si dice <u>sottospazio vettoriale</u> se è sp. vettoriale con le stesse operazioni (di somma e di prodotto esterno)

Se prendo $\forall \underline{u}, \underline{v} \in W \subset V$, $+$

$$(*) \begin{cases} \underline{u} + \underline{v} \in W & \forall \underline{u}, \underline{v} \in W \\ \alpha \underline{u} \in W, & \forall \underline{u} \in W, \forall \alpha \in \mathbb{K} \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{l} \underline{v} \in W \\ 0 \cdot \underline{v} = \underline{0} \end{array} \right.$

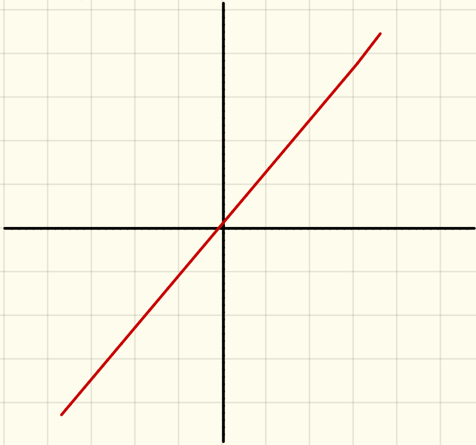
---

valgono $(*) \iff W$ è sottosp. vett. (con $+$ e $\cdot$)

---

tutti gli assiomi valevano in $V \Rightarrow$ valgono in W

Quali sono i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$?



$\cdot\ (x, y)$

rette che passano per l'origine

$$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0 \}$$

$$(x_1, y_1) \in W, \quad (x_2, y_2) \in W$$

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W \ ?$$

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = 0 \ ?$$

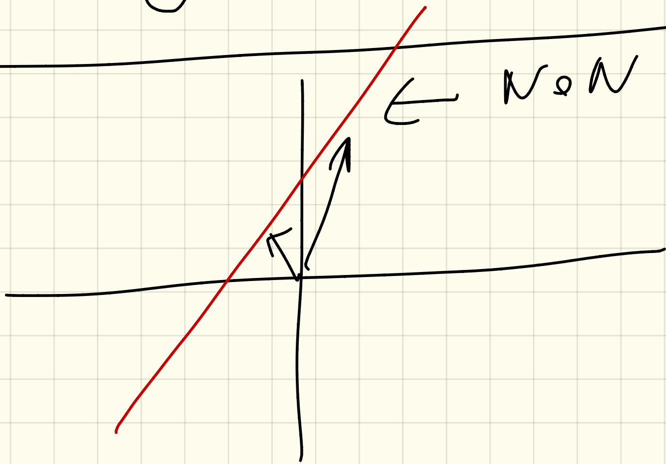
$$\underbrace{a x_1 + b y_1}_{=0} + \underbrace{a x_2 + b y_2}_{=0} = 0$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\alpha(x_1, y_1) \in W \ ?$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

$$a(\alpha x_1) + b(\alpha x_2) = 0 \quad ?$$

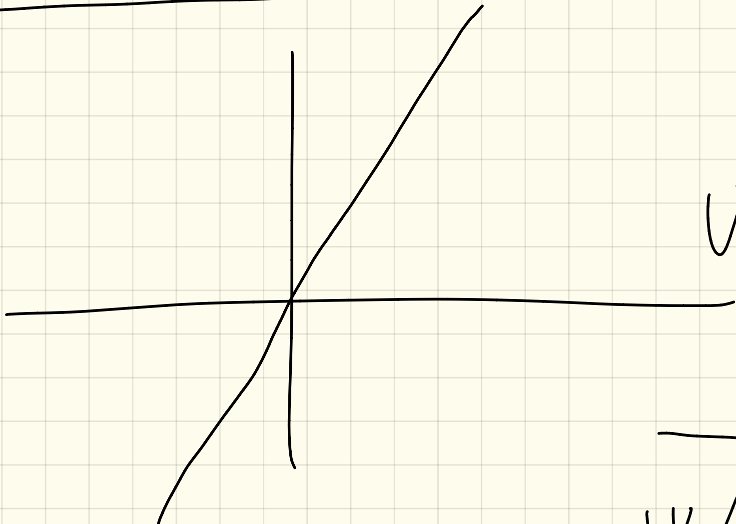
$$\alpha\,[\underbrace{a x_1 + b x_2}_{=\,0}] = 0$$



← NON È sottosp. vettor.

(NON contiene $\underline{0}$)

W sottosp. vett. $\Rightarrow W \ni \underline{0}$ el. neutro di V



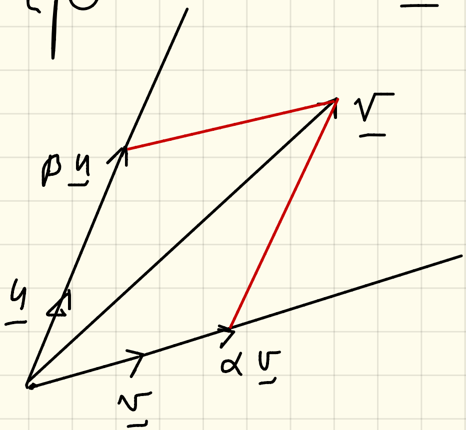
$W = \{\underline{0}\}$ è sempre sottosp. vett

$W = V$

NON CE NE SONO ALTRI

Se $W \supset$ due vettori $\underline{v}, \underline{u}$ non allineati allora $W = \mathbb{R}^2$. Infatti:

W deve contenere tutte le espressioni del tipo $\alpha \underline{v} + \beta \underline{u}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$



e ogni vettore è di questa forma

altra dimostrazione "algebrica"

$\underline{u} = (x, y)$

$\underline{v} = (z, t)$

non allineati: $\nexists\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha \underline{u} = \underline{v}$ (oppure $\alpha \underline{v} = \underline{u}$)

$\forall\ \underline{w} = (w_1, w_2)$ $\exists$ soluzione di

verificare

$$\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} = \underline{w}$$

$$(\alpha x + \beta z,\ \alpha y + \beta t) = (w_1, w_2)$$

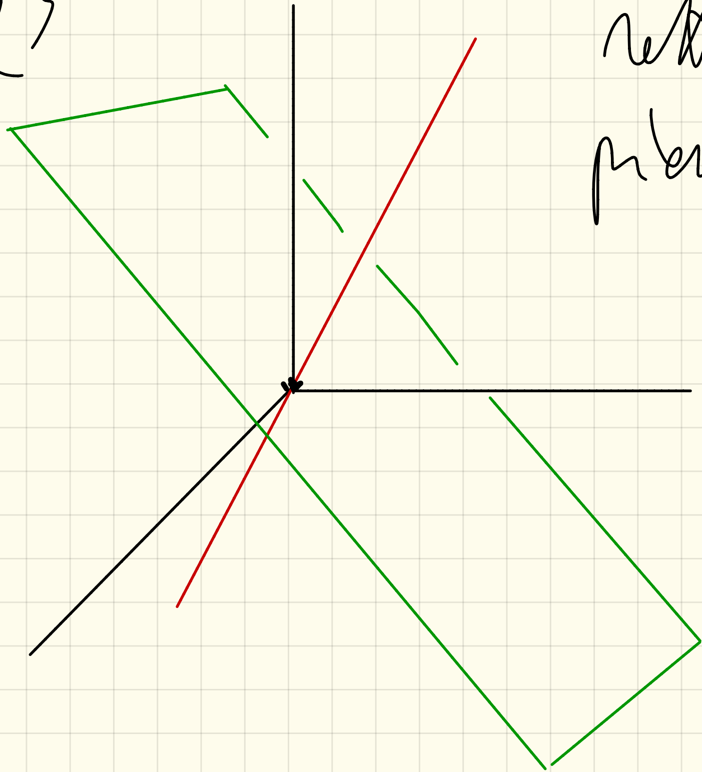
$$\begin{cases} \alpha x + \beta z = w_1 \\ \alpha y + \beta t = w_2 \end{cases}$$

è risolubile $\boxed{\exists\, \alpha, \beta}$

in $\mathbb{R}^3$

rette per l'origine

piani per l'origine



Esercizi 1. G gruppo. Un sottoinsieme $H \subset G$ è sottogruppo se e solo se: i) $\forall\, h_1, h_2 \in H$, $h_1 \cdot h_2 \in H$;

ii) $\forall\, h \in H$, $h^{-1} \in H$ (dove h^{-1} indica l'inverso di h in G)

---

2. Usando es. 1, dimostrare che se $H \subset G$ è sottogruppo, allora l'identità (el. neutro) di G appartiene ad H.

---

3. G gruppo. $H \subset G$ è sottogruppo se e solo se $\forall\, h_1, h_2 \in H$ si ha $h_1 h_2^{-1} \in H$.

---

4. V sp. vett. su $\mathbb{K}$. W sottoinsieme di V è sottospazio vettoriale $\Longleftrightarrow$ $\forall\, \underline{u}, \underline{v} \in W$ e $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ vale

$$\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} \in W$$