Lezione del 14/11/2013

[FORMULA DIMENSIONI] $f: V \to W$ lineare

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V}$$

---

def. $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f$

quindi

$$\boxed{\operatorname{rg}(f) = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f}$$

oss. Se f è associata a una matrice A

$f(\underline{x}) = A\underline{x} \Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f$

esercizio 1 $f: V \to V$ lineare (stesso spazio in partenza e in arrivo). E' vero che $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

---

se è vero, dimostrarlo, se non è vero, trovare un controesempio

L'insieme di tutte le $f: V \to W$ lineari (per fissati V e W) ha una "struttura"?

c'è una somma?

def date $f, g: V \to W$ lineari, definiamo

$$f+g : V \to W \qquad (f+g)(\underline{v}) = f(\underline{v}) + g(\underline{v})$$

somma in W

eser. $\underline{f+g \text{ è lineare}}$

devo dim. che $(f+g)(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = (f+g)(\underline{v}_1) + (f+g)(\underline{v}_2)$

e che $(f+g)(\alpha \underline{v}) = \alpha (f+g)(\underline{v})$

---

c'è il neutro

$f + e = e + f = f$

$e(\underline{v}) = \underline{0} \quad \forall \underline{v}$ appl. nulla

+ è associativa (es)

$f \qquad f+g = g+f = e \qquad g(\underline{v}) = -f(\underline{v})$

$$\mathcal{L}(V, W) = \{ f : V \to W \mid f \text{ lineare} \}$$

con $+$ è un gruppo commutativo

$$f : V \to W, \qquad \alpha \in \mathbb{K}$$

$$(\alpha f)(\underline{v}) = \alpha f(\underline{v}) \qquad (\text{def})$$

<u>verificare gli assiomi di sp. vett.</u>

<u>Prop</u> $\mathcal{L}(V, W)$ è sp. vett. su $\mathbb{K}$.

composizione di appl. lineari.

$$f: V \longrightarrow W, \quad g: W \longrightarrow Z \quad \text{lineari}$$

$$g \circ f: V \longrightarrow Z \qquad (g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$$

<u>Prop</u>. $g \circ f$ è lineare.

<u>dim</u> $g \circ f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = g(f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)) = g(f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)) =$

$= g(f(\underline{v}_1)) + g(f(\underline{v}_2)) = g \circ f(\underline{v}_1) + g \circ f(\underline{v}_2)$

$g \circ f(\alpha \underline{v}) = g(f(\alpha \underline{v})) = g(\alpha f(\underline{v})) = \alpha g(f(\underline{v})) =$

$= \alpha g \circ f(\underline{v})$

$V, \quad W = \mathbb{K}$, si indica

$\mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = V^*$ si chiama lo spazio <u>duale</u> di V.

Contiene tutte le funzioni $V \to \mathbb{K}$ lineari.

(funzionali lineari su V, o "covettori")

<u>es</u>. Base di V^*: Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V.

$$\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\} \qquad f_i(\underline{v}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

<u>es</u>. dim. che è base di V^*

(detta base duale di $\mathcal{B}$)

eser 2 (a) $\ker(g\circ f) \supset \ker f$; (b) $\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$

---

eser 3 $f: V \to W$, $Z \subset W$ sottosp. vett.

(i) Dim che $f^{-1}(Z) = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) \in Z\}$ è sottosp. vett. di V.

(ii) Dim. che se f è surgettiva

$$\dim f^{-1}(Z) = \dim Z + \dim \ker f$$

(iii) In generale:

$$\dim f^{-1}(Z) = \dim(\mathrm{Im} f \cap Z) + \dim \ker f$$

---

eser. 4. Dim. che

$$\dim \ker(g\circ f) = \dim(\mathrm{Im} f \cap \ker g) + \dim \ker f$$

Eser. 5. Dim. che:

$$\dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim \operatorname{Im} f - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g)$$

<u>suggerimenti</u>:

<u>es 1</u>: se $\dim V = 1$ l'eser. è banalmente vero. Se $\dim V \geq 2$ no: trovare un controesempio costruendo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c. $rg(f) = 1$, $\operatorname{Im} f = \ker f$.

<u>es. 3 (ii)</u>: Applicare la formula delle dimensioni a $f|_{f^{-1}(Z)}$

$$f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \longrightarrow Z$$

es. 4.: osservare che $\ker(g\circ f) = f^{-1}(\ker g)$ e applicare l'eserc. 3(iii).

es. 5: si applichi la formula delle dimensioni o utilizzando l'esercizio 4, oppure osservando che

$$\operatorname{Im}(g\circ f) = g(\operatorname{Im} f)$$

e usando un corollario della formula.