Lezione del 18/2/2016

Dim. teo. Sylvester reale.

Sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base ortogonale (esiste per Lagrange).

$W_+ = \mathrm{Span}\{\underline{v}_i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) > 0\}$, $W_- = \mathrm{Span}\{\underline{v}_i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) < 0\}$,

$W_0 = \mathrm{Span}\{\underline{v}_i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = 0\}$.

Si ha $\quad V = W_+ \oplus W_- \oplus W_0$.

Si ha: $W_0 = V^\perp$. E' chiaro che $W_0 \subset V^\perp$. Ma $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim W_+ + \dim W_-$, per cui $\dim W_0 = \dim V^\perp$, quindi coincidono.

È inoltre chiaro che $\varphi|_{W_+ \times W_+} > 0$, $\varphi|_{W_- \times W_-} < 0$

(esercizio!)

Quindi $\iota_+(\varphi) \geq \dim W_+$, $\iota_-(\varphi) \geq \dim W_-$.

Se $\exists$ W t.c. $\varphi|_{W \times W} > 0$, $\dim W > \dim W_+$, allora

$\dim[W \cap (W_- \oplus W_0)] > 0$ per Grassmann;

[infatti: $\dim(W \cap (W_- \oplus W_0)) = \underbrace{\dim W + \dim (W_- \oplus W_0)}_{> n} - \underbrace{\dim[W + (W_- \oplus W_0)]}_{\leq n}$

≥ 1]

Allora, se

$$\underline{0} \neq \underline{w} \in W \cap (W_- \oplus W_0)$$

allora $\varphi(\underline{w}, \underline{w}) > 0$ perché $\underline{w} \in W$,

$\varphi(\underline{w}, \underline{w}) \leq 0$ perché $\underline{w} \in W_- \oplus W_0$, assurdo.

Quindi $i_+(\varphi) = \dim W_+$, e similmente $i_-(\varphi) = \dim W_-$,

che dimostra la prima parte.

Per la seconda, si prenda una base ortogonale ordinata in modo che i $\underline{v}_i$ t.c. $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) > 0$ vengano prima, seguiti dai $\underline{v}_i$ t.c. $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) < 0$. Facendo il cambiamento

$$\underline{v}_i' = \frac{1}{\sqrt{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}}\, \underline{v}_i \quad , i = 1, \dots, i_+(\varphi);$$

$$\underline{v}_i' = \frac{1}{\sqrt{-\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}}\, \underline{v}_i \quad , i = i_+(\varphi)+1, \dots, i_+(\varphi)+i_-(\varphi) \;;$$

$$\underline{v}_i' = \underline{v}_i \,, \quad i = r+1, \dots, n$$

si ottiene la tesi.

Def. La SEGNATURA del prodotto scalare $\varphi: V \times V \to \mathbb{R}$ è la terna $\sigma(\varphi) = (i_+(\varphi), i_-(\varphi), i_0(\varphi))$.

NOTA: $i_+(\varphi) + i_-(\varphi) + i_0(\varphi) = \dim V$;

$i_+(\varphi) + i_-(\varphi) = rg(\varphi) = rg(M_{\mathcal{B}}(\varphi))$;

$i_0(\varphi) = \dim V^{\perp} = \dim \ker(M_{\mathcal{B}}(\varphi))$.

Def. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è simmetrica, definiamo

$i_+(A), i_-(A), i_0(A)$ come gli indici del prodotto scalare

$\varphi_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (\underline{x}, \underline{y}) = {}^t\underline{x} A \underline{y}$ e $\sigma(A) = \sigma(\varphi_A)$

Corollario. $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ <u>simmetriche</u> sono congruenti $\Longleftrightarrow$ $\sigma(A) = \sigma(B)$.

dim. Infatti: A, B sono congruenti $\Longleftrightarrow$ sono matrici di uno stesso prodotto scalare rispetto a basi diverse (ad es. si prenda $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uguale a φ_A con la base canonica, e allora φ diventa uguale a φ_B rispetto alle base data dalle colonne della matrice P di cambiamento di base] $\Longleftrightarrow$ hanno le stesse segnature (perchè ad es. $i_+(A) = i_+(\varphi) = i_+(B)$, ...)

$$B = {}^tPAP, \quad P \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \quad {}^t\underline{x} B \underline{y} = {}^t(P\underline{x}) A (P\underline{y})$$

quindi $\varphi_B(\underline{x}, \underline{x}) > 0 \iff \varphi_A(P\underline{x}, P\underline{x}) > 0$. Poiché P è invertibile $i_+(B) = i_+(A)$. Stesso ragionamento per $i_-(B) = i_-(A)$. Inoltre la congruenza conserva il rango quindi $i_0(B) = i_0(A)$.

$(\Leftarrow)$ Per il teorema A e B sono congruenti alla stessa matrice, quindi (per transitività) sono congruenti tra loro.

__NOTA__. Quindi, le classi di congruenza di matrici simmetriche in $M_n(\mathbb{R})$ corrispondono bigettivamente alle possibili segnature. ESERCIZIO: quante sono tali classi per dato n?

Per ogni $W \subset V$ t.c. $\varphi|_{W \times W}$ è non degenere ($\Leftrightarrow W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$) si definisce

PROIEZIONE ORTOGONALE $p_W : V \to W$ tramite:

$p_W(\underline{v}) = \underline{w}$, dove $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}'$ è la decomposizione (unica) di $\underline{v}$ secondo $V = W \oplus W^\perp$.

FORMULA ESPLICITA DI PROIEZIONE.

Sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h$ base ortogonale di W (Lagrange applicato a $\varphi|_{W \times W}$). NOTA: poiché $\varphi|_{W \times W}$ è non degenere, nessun

$\underline{v}_i$ è isotropo $\left(i_0(\varphi|_{W\times W}) = 0 \right)$.

Prop. Si ha:

$$\boxed{pr_W(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(\underline{v},\underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_i)}\,\underline{v}_i}$$

dim. Sia $\underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(\underline{v},\underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_i)}\,\underline{v}_i$

e poniamo:

$$\underline{w}' = \underline{v} - \underline{w} = \underline{v} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(\underline{v},\underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_i)}\,\underline{v}_i$$

Basta dimostrare che $\underline{w}' \perp \underline{w}''$ $\forall\, \underline{w}''$ in W. Basterà dimostrare $\varphi(\underline{v}_i, \underline{w}') = 0$ per $i = 1, \dots, n$.

$$\varphi(\underline{v}_i, \underline{w}') = \varphi\left(\underline{v}_i \, , \, \underline{v} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_j)}{\varphi(\underline{v}_j, \underline{v}_j)} \underline{v}_j \right) =$$

$$= \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}) - \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)} \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = 0$$ per l'ortogonalità di $\underline{v}_i$ —

Def. Il coefficiente $\dfrac{\varphi(\underline{v}, \underline{u})}{\varphi(\underline{u}, \underline{u})}$, definito se $\underline{u}$ è non-isotropo, si dice COEFFICIENTE DI FOURIER di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{u}$.

Esercizio. Ridimostrare Lagrange algoritmicamente usando coeff. di Fourier.

Osservazioni. Sia φ non degenere ($V^\perp = \{\underline{0}\}$).

1. Quando è possibile estendere un dato sistema $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in V$ di vettori a 2 a 2 ortogonali a una base ortogonale di V?

Risp.: Sia $W = \mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$. Il sistema si estende a base ortogonale di $V \iff \varphi|_{W \times W}$ è non-degenere ($\iff W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$). Infatti

$\Rightarrow$: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n$ base ortogonale, allora $W^\perp = \mathrm{Span}\{\underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$ (....)

$\Leftarrow$ L'unione di una base ortogonale di W e di una di $W^\perp$ è una base ortogonale di V.

__oss__. Può essere $V^\perp = \{\underline{0}\}$ ma $\varphi|_{W\times W}$ degenere ($W \cap W^\perp \neq \{\underline{0}\}$); esempio: $\underline{v}$ vettore isotropo e $W = \mathrm{Span}\{\underline{v}\}$.
(__eserc.__: $V^\perp \subset W^\perp$, $\forall W$).

All'altro caso (estremo) opposto a $\varphi|_{W\times W}$ non degenere c'è il caso $W \subset W^\perp$.

__Def.__ Un sottospazio $W \subset V$ t.c. $\varphi|_{W\times W} = 0$ ($\Leftrightarrow W \subset W^\perp$) si dice SOTTOSPAZIO ISOTROPO.

I sottosp. isotropi di dim. 1 sono quelli generati da un vettore isotropo.

Esercizi. 1. φ non degenere ($V^\perp = \{\underline{0}\}$). Se W è sottospazio isotropo allora

$$\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$$

[sol.: $W \subset W^\perp \Rightarrow \dim W \leq \dim V - \dim W$]

2. V su $\mathbb{R}$, $\sigma = (\iota_+, \iota_-, 0)$ allora

$$\max\{\dim W \mid W \text{ isotropo}\} = \min\{\iota_+, \iota_-\}.$$

[Sia $\dim W > \min\{\iota_+, \iota_-\}$. Sia ad es $\iota_- = \min\{\iota_+, \iota_-\}$; sia W_+ un sottosp. t.c. $\dim W_+ = \iota_+$, $\varphi|_{W_+ \times W_+} > 0$. Per Grassmann $\dim W \cap W_+ > 0$, quindi $\varphi|_{W \times W}$ non è 0.

Viceversa, sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{\iota_+}, \underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_{\iota_-}$ $(\iota_+ + \iota_- = n)$

base ortogonale con $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = 1$, $i = 1, \dots, \iota_+$, $\varphi(\underline{v}'_i, \underline{v}'_i) = -1$, $i = 1, \dots, \iota_-$). Supponiamo anche qui $\iota_- \leq \iota_+$. Allora $W = \mathrm{Span}\{\underline{v}_1 + \underline{v}'_1, \dots, \underline{v}_{\iota_-} + \underline{v}'_{\iota_-}\}$ è sottospazio isotropo.]

3. Sia $V = U \overset{\perp}{\oplus} W$ (SOMMA DIRETTA ORTOGONALE).

Allora
$$\iota_+(\varphi) = \iota_+(\varphi|_{U\times U}) + \iota_+(\varphi_{W\times W});$$
$$\iota_-(\varphi) = \iota_-(\varphi|_{U\times U}) + \iota_-(\varphi|_{W\times W});$$
$$\iota_0(\varphi) = \iota_0(\varphi|_{U\times U}) + \iota_0(\varphi|_{W\times W}).$$

4. (i) Si ha: $\quad W \subset (W^\perp)^\perp \quad , \forall W \subset V$

$\left[\underline{w} \in W \Rightarrow \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0 \quad \forall \underline{v} \in W^\perp \right]$

(ii) $\quad (W^\perp)^\perp = W + V^\perp$

$\left[\supset : \quad \underline{v} = \underline{w} + \underline{u}, \quad \underline{w} \in W, \ \underline{u} \in V^\perp \Rightarrow \forall \underline{z} \in W^\perp \right.$

$$\varphi(\underline{v}, \underline{z}) = \varphi(\underline{w} + \underline{u}, \underline{z}) = \varphi(\underline{w}, \underline{z}) + \varphi(\underline{u}, \underline{z}) = 0$$

Per la formula del teorema vista la volta scorsa (applicata a $W^\perp$)
$\dim (W^\perp)^\perp = \dim V - \dim W^\perp + \dim (W^\perp \cap V^\perp) =$ [essendo $V^\perp \subset W^\perp$ per ogni W] $= \dim V - \dim W^\perp + \dim V^\perp =$ [riapplicando la formula a W] $= \dim V - (\dim V - \dim W + \dim (W \cap V^\perp)) + \dim V^\perp = \dim W + \dim V^\perp - \dim (W \cap V^\perp) \underset{\text{[GRASSMANN]}}{=} \dim (W + V^\perp)$ $\Big]$

(iii) Se φ è non degenere : $(W^\perp)^\perp = W$

5. Sia φ in $\mathbb{R}^3$ di segnatura $\sigma = (2,1,0)$. Al variare di W di dim 1 in $\mathbb{R}^3$, descrivere la "posizione" di $W^\perp$.

<u>cenno di soluz.</u> 1ª osservaz.: φ è non-degenere ($i_0 = 0$) quindi $\dim W^\perp = 2$.

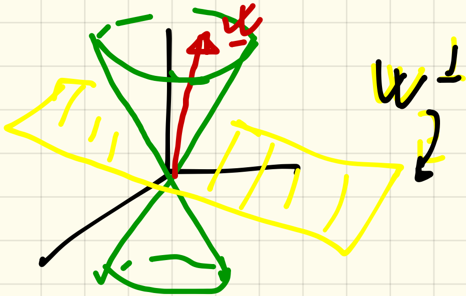
2ª osservaz.: per tutti i vettori non isotropi $\underline{w} \in V$ ($\Leftrightarrow W = \mathrm{Span}(\underline{w}) \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$) si ha $V = W \oplus W^\perp$.

Se invece $\underline{w}$ è isotropo, allora $W = \mathrm{Span}(\underline{w}) \subset W^\perp$.

3^a osservaz.: sia $\underline{w}$ t.c. $\varphi(\underline{w},\underline{w}) < 0$

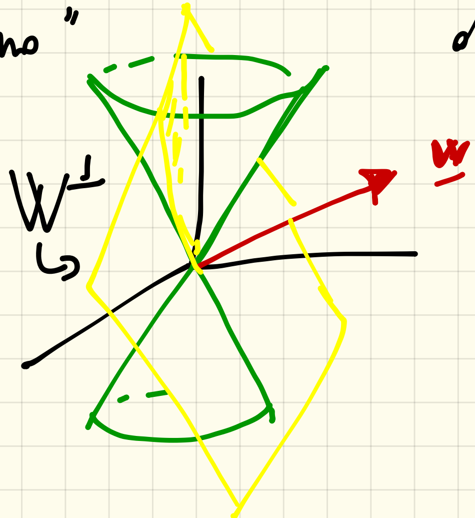
Per l'esercizio 3 deve essere $\varphi|_{W^\perp \times W^\perp} > 0$.

(cioè $W^\perp$ sta "fuori del cono" dei vettori isotropi).



Sia $\underline{w}$ t.c. $\varphi(\underline{w},\underline{w}) > 0$; allora $i_+(\varphi|_{W^\perp \times W^\perp}) = 1$, $i_-(\varphi|_{W^\perp \times W^\perp}) = 1$

quindi $W^\perp$ "taglia il cono" dei vettori isotropi.



Sia $\underline{w}$ isotropo. Allora $W = \text{Span}\{\underline{w}\}$ è una retta generatrice del cono. Il piano $W^\perp$ contiene tale retta, ma non può "tagliare" il cono; nel senso che non può contenere un vettore $\underline{w}_1$ con $\varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_1) > 0$ e anche un vettore $\underline{w}_2$ con $\varphi(\underline{w}_2, \underline{w}_2) < 0$; altrimenti, $\iota_+(\varphi|_{W^\perp \times W^\perp}) = 1 = \iota_-(\varphi|_{W^\perp \times W^\perp})$. Ma allora

$\varphi|_{W^\perp \times W^\perp}$ non sarebbe degenere, mentre

$$W^\perp \cap (W^\perp)^\perp = W^\perp \cap W = W \supsetneq \{\underline{0}\}$$

Segue che $W^\perp$ è il piano tangente al cono che contiene la generatrice W.