Lezione del 19/3/2015

$A \in M_n(\mathbb{K})$, $\quad p(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\quad p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, $\quad a_i \in \mathbb{K}$.

Il polinomio $p(x)$ può essere valutato nella matrice A, producendo una nuova matrice

$$p(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I_n \quad \in M_n(\mathbb{K}).$$

Fissiamo la matrice A e facciamo variare il polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Si noti:

Se $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ allora

1) $\quad \alpha p(A) + \beta q(A) = h(A)$, dove $h(x) = \alpha p(x) + \beta q(x)$.

cioè la valutazione in A dà un'applicazione lineare $\sigma_A : \mathbb{K}[x] \to M_n(\mathbb{K})$.

L'immagine di σ_A sono tutte le matrici che si possono scrivere come polinomio in A.

2) $\quad p(A)\, q(A) = r(A)$, dove $r(x) = p(x)\, q(x)$ è il prodotto dei due polinomi $p(x)$ e $q(x)$

[in altri termini: la valutazione in A è anche un "omomorfismo di algebre":

<u>algebra</u>: spazio vettoriale con un'altra operazione rispetto alla quale è anello].

Ne segue

3) $p(A)\,q(A) = q(A)\,p(A)$, $\forall\, p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$, quindi l'immagine di σ_A è commutativa rispetto al prodotto.

<u>Prop.</u> Se A è diagonalizzabile $\Rightarrow$ $p(A)$ lo è, $\forall\, p(x) \in \mathbb{K}[x]$.

<u>dim</u> $\forall\, P \in GL_n(\mathbb{K})$ si ha: $P^{-1}\,p(A)\,P = p(P^{-1}AP)$ $(*)$ [verificare!]

Quindi se P diagonalizza A, allora diagonalizza ogni potenza di A, e anche la combinazione di potenze di A, cioè diagonalizza $p(A)$.

<u>Corollario</u>. Se A è diagonalizzabile $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} \sigma_A$ è un'algebra di matrici simultaneamente diagonalizzabili.

Consideriamo ora $\ker \sigma_A$, ovvero quei polinomi che si annullano in A.

NOTA: σ_A non può essere iniettiva, perché $\dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$, mentre $\mathbb{K}[x]$ ha dim infinita (se si prendono i polinomi di grado $\leq m$, $\mathbb{K}_m[x]$, allora se $m > n^2$ $\dim \mathbb{K}_m[x] > \dim M_n(\mathbb{K})$ e quindi $\sigma_A|_{\mathbb{K}_m[x]}$ non è iniettiva).

Quindi esistono sicuramente dei polinomi $p(x)$ t.c. $p(A) = 0$.

Cioè $\ker \sigma_A = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(A) = 0\} \underset{\neq}{\supset} \{0\}$

OSS. $\ker \sigma_A$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto esterno (quindi è un sottosp. vett. di $\mathbb{K}[x]$) ed è chiuso anche rispetto alla moltiplicazione (quindi è una sottoalgebra di $\mathbb{K}[x]$). Di più, se $p(x) \in \ker \sigma_A$ e $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ è un polinomio qualunque, allora il prodotto $p(x)\, q(x) \in \ker \sigma_A$ [dim. per esercizio]

OSS $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\ker \sigma_A = \ker \sigma_{P^{-1}AP}$

Infatti $\forall\, p(x) \in \mathbb{K}[X]$ si ha $\quad p(P^{-1}AP) = P^{-1}\, p(A)\, P$

quindi un polinomio si annulla in $A \iff$ si annulla in $P^{-1}AP$.

<u>Teorema</u> $\exists$ un unico polinomio monico (: con 1° coeff. uguale a 1) $\varphi_A(x) \in \mathbb{K}[X]$, t.c. ogni polinomio $p(x) \in \operatorname{Ker} \sigma_A$ è multiplo di $\varphi_A(x)$.

<u>def</u>. $\varphi_A(x)$ si chiama il <u>polinomio minimo</u> di A.

<u>dim</u>. Sia $\varphi(x) \in \operatorname{Ker}\sigma_A$ un polinomio monico di grado minimo in $\operatorname{Ker}\sigma_A$. Se $p(x) \in \mathcal{P}_A$, eseguiamo la divisione euclidea tra $p(x)$ e $\varphi(x)$:

$$p(x) = \varphi(x)\, q(x) + r(x) \quad , \qquad \text{con grado } r(x) < \text{grado } \varphi(x).$$

Sostituendo A si trova:

$$p(A) = \varphi(A)\, q(A) + r(A) \quad , \qquad \text{ed essendo } p(A) = 0 \;,\; \varphi(A) = 0 \quad \text{si trova}$$

$r(A) = 0$, cioè $r(x) \in \ker \sigma_A$. Ma essendo $\varphi(x)$ di grado minimo per costruzione, può essere solo $r \equiv 0$.

Per l'unicità, basta osservare che se $\psi(x)$ è un altro polinomio monico in $\ker \sigma_A$ di grado minimo (= quindi al grado di $\varphi(x)$) applicando l'argomento sopra si trova:

$$\psi(x) = \varphi(x)\; q$$

dove ora q è una costante (φ e ψ hanno lo stesso grado). Siccome φ e ψ sono monici, segue subito $q = 1$.

__es.__ Sia A diagonalizzabile con autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Allora $\varphi_A(x) = (x-\lambda_1) \cdots (x-\lambda_k)$.

Infatti: si verifica facilmente che se $p(x) = (x-\lambda_1) \cdots (x-\lambda_k)$ allora $p(A) = 0$.

Quindi $\varphi_A(x)$ è un divisore di $p(x)$. Si verifica altrettanto facilmente che se si prende un polinomio $q(x)$ divisore proprio di $p(x)$ (cioè $q(x)$ è divisore di $p(x)$ ma non coincide con $p(x)$) allora $q(A) \neq 0$.

__nota__ In questo caso $\varphi_A(x)$ è un divisore di $p_A(x)$, e quindi $p_A(A) = 0$.

In generale:

<u>Teorema</u> (Hamilton-Cayley) $\operatorname{Ker} \sigma_A \ni p_A(x)$; in altri termini ogni matrice annulla il suo polinomio caratteristico.

<u>dim</u> Se $A\underline{v} = \lambda_i \underline{v}$, $p_A(x) = (x-\lambda)\, q(x) \Rightarrow p_A(A)(\underline{v}) = q(A)(A-\lambda I)(\underline{v}) = \underline{0}$

cioè $p_A(A)$ manda tutti gli autovettori in $\underline{0}$. Questo dim. che se A è diagonalizzabile allora $p_A(A) = O$ (perchè K^n ha base di autovettori).

In generale, occorre il seguente teorema.

<u>Teorema</u> (triangolarizzazione) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ allora $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{C})$ t.c.

$P^{-1}AP = T$ matrice triangolare (superiore).

<u>dim</u>. Sia $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$ autovettore di A e sia $\mathcal{B}' = \{\underline{v} = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ base di $\mathbb{C}^n$. Allora se $P_1 = [\underline{v}_1 | \cdots | \underline{v}_n]$ si ha:

$$P_1^{-1} A P_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right] = A'$$

(in altre parole: l'applicazione $f_A : \underline{x} \to A\underline{x}$, che rispetto alla base canonica ha matrice A, rispetto a $\mathcal{B}'$ ha matrice A'). Per induzione su n, siccome $C \in M_{n-1}(\mathbb{C})$, $\exists\, Q \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ t.c. $Q^{-1}CQ = T'$, triangolare di ordine $n-1$. Sia $\tilde{Q} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$; allora $\tilde{Q}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right]$ e si ha:

$$\tilde{Q}^{-1} A' \tilde{Q} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & B' \\ \hline 0 & Q^{-1}CQ \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & B' \\ \hline 0 & T' \end{array}\right] = T$$

con T triangolare, per cui $P = P_1 \tilde{Q}$ ∎

[continua dim. teo Hamilton-Cayley]

In generale, possiamo ridurci al caso in cui $A = T$ triangolare (superiore)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sia $W_i = \{ \underline{x} \in \mathbb{C}^n \mid x_j = 0 \text{ per } j > i \}$

Nota $A(W_i) \subset W_i$:

Si ha: $p_A(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \cdots (\lambda - a_{nn})$.

Dimostriamo per induzione su i che:

$$(A - a_{11} I) \cdots (A - a_{ii} I)(\underline{v}) = \underline{0} \quad , \forall \underline{v} \in W_i$$

(il caso $i = n$ è la tesi). Caso $i=1$: facile.

<u>NOTA</u>: $(A - a_{ii} I)(W_i) \subset W_{i-1}$

Allora: $\underline{x} \in W_i \Rightarrow (A - a_{11} I) \cdots (A - a_{i-1,i-1} I) \Big[\underbrace{(A - a_{ii} I)\underline{x}}_{\in W_{i-1}} \Big] = \underline{0}$ per induzione.

Q.E.D.

<u>Teorema</u>. $A \in M_n(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ $\varphi_A(x)$ si decompone in fattori lineari distinti in $\mathbb{K}[x]$

NON FACCIAMO LA DIMOSTRAZIONE DI $\Leftarrow$