Lezione del 21/11/2013

NOTA: MENTRE SI LEGGE LA TEORIA, CONVIENE LEGGERE ANCHE GLI ESEMPI 1) e 2) SCRITTI ALLA FINE, CHE DOVREBBERO RENDERE CHIARO QUELLO CHE SI STA FACENDO (in particolare, cercare di avere chiaro l'es. 1) pag. 24)

V spazio vett. su $\mathbb{K}$ di dimensione n.

RICORDIAMO CHE fissata una base

$$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$

di V, ogni vettore $\underline{v} \in V$ si può sviluppare in uno ed un sol modo come

$$\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n \quad , \quad x_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \dots, n.$$

I numeri $x_1, \dots, x_n$ sono detti *le coordinate* di $\underline{v}$ rispetto alla data base.

Il vettore $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$ si chiama *il vettore delle coordinate* di $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$, e usualmente si scrive come vettore colonna.

Le basi si scrivono usualmente come riga [riga di vettori] cosicché formalmente si può scrivere (moltiplicazione riga x colonna)

$$\underline{v} = [\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \underline{v}_1 + \cdots + x_n \underline{v}_n$$

(posso moltiplicare un vettore per un numero)

$$= [\mathcal{B}]\, \underline{x} =$$

$$= [\mathcal{B}]\, [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$$

dove ho posto il vettore colonna delle coordinate di $\underline{v}$ come $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$

Ad es. il vettore $\underline{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$ si scrive rispetto alla base

canonica $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ come $\underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n = [\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ si scrive $\underline{v} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 = [\underline{e}_1 \ \underline{e}_2 \ \underline{e}_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ma se prendiamo la base $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

allora lo stesso $\underline{v}$ si scrive:

$$\underline{v} = -\frac{1}{2} \underline{v}_1 + \frac{3}{4} \underline{v}_2 + \frac{1}{4} \underline{v}_3 = [\underline{v}_1 \ \underline{v}_2 \ \underline{v}_3] \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

Teorema 1. Sia V sp. vett. di dim n, $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una sua base. L'applicazione

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad \text{data da} \qquad \varphi_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$$

è un isomorfismo.

---

dim. Se $\underline{v}$ ha vettore di coordinate $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ rispetto a $\mathcal{B}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$, allora il vettore $\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, ha coordinate $\alpha [\underline{v}]_{\mathcal{B}} + \beta [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$, cioè $[\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}]_{\mathcal{B}} = \alpha [\underline{v}]_{\mathcal{B}} + \beta [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$, che dimostra la linearità di $\varphi_{\mathcal{B}}$.

$\operatorname{Ker} \varphi_{\mathcal{B}}$ è il solo vettore con coordinate nulle, cioè $\underline{0} \in V$, quindi $\varphi_{\mathcal{B}}$ è iniettiva. Allora è surgettiva perché gli spazi hanno la stessa dimensione ∎

Corollario. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in V$ sono lin. indipen. $\Longleftrightarrow$ $[\underline{v}_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [\underline{v}_k]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ sono lin. indip. (rispetto a qualunque base).

dim. Gli isomorfismi portano vettori indipendenti in vettori indip.

Corollario [algoritmo]. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in V$ sono lin. indip. $\Longleftrightarrow$ la matrice $\left[[\underline{v}_1]_{\mathcal{B}} [\underline{v}_2]_{\mathcal{B}} \cdots [\underline{v}_k]_{\mathcal{B}} \right]$ ha rango k.

dim. Infatti: $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in \mathbb{K}^n$ sono lin. indip. $\Longleftrightarrow$

$$\dim(\operatorname{Span}\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\}) = k \Longleftrightarrow \operatorname{rg}[\underline{x}_1 | \cdots | \underline{x}_n] = k.$$

Es. I vettori $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$. Basta dim che la matrice da essi formata (o la sua trasposta) ha rango 3. ....

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \text{matrice a scala} \dots$$

es. I polinomi $p_0 = 1$, $p_1 = 1+x$, $p_2 = 1+x+x^2$, $\dots$, $p_n = 1+x+\dots+x^n$ sono base di $\mathbb{K}_n[x]$.

rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

$$[p_j]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

con j componenti $= 1$ e le rimanenti 0.

La matrice dei vettori è a scala con $n+1$ pivots.

es. Le matrici $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

sono lin. indip. in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

risp. alla base canonica $\mathcal{B}$:

$\underline{e}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\underline{e}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\underline{e}_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\underline{e}_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$[A]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ $[B]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}4\\1\\3\\2\end{bmatrix}$ $[C]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}3\\4\\2\\1\end{bmatrix}$

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -7 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10/7 & 13/7 \\ 0 & 1 & 7/2 & 11/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10/7 & 13/7 \\ 0 & 0 & 29/14 & 51/14 \end{pmatrix}$$

ha rango 3
quindi le 3 matrici
sono lin. indip.

APPLICAZIONI LINEARI E MATRICI

Sia $f: V \longrightarrow W$ applic. lineare. Fissiamo basi in partenza e in arrivo:

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V

$\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ base di W

Ricordiamo il teorema:

<u>Teo</u> f è completamente determinata da $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$.

Consideriamo un generico vettore $\underline{v} \in V$, che si scrive usando $\mathcal{B}$:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \underline{v}_i \quad \in V \tag{1}$$

Applichiamo f:

$$f(\underline{v}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \, f(\underline{v}_j) \quad \in W \tag{2}$$

Chi sono le coordinate di $f(\underline{v})$ rispetto a $\mathcal{B}'$?

Abbiamo visto nel teo. 1:

$$\varphi_{\mathcal{B}'}\big(f(\underline{v})\big) \underset{\text{per def.}}{=} \big[f(\underline{v})\big]_{\mathcal{B}'} = \sum_{j=1}^{n} x_j \, \big[f(\underline{v}_j)\big]_{\mathcal{B}'} \tag{3}$$

Sia $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \left[[f(\underline{v}_1)]_{\mathcal{B}'} \,\vdots\, \cdots\cdots \,\vdots\, [f(\underline{v}_n)]_{\mathcal{B}'} \right]$$

tale che la colonna j-sima è costituita dal vettore $[f(\underline{v}_j)]_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{K}^m$ delle coordinate dell'immagine $f(\underline{v}_j)$ del j-simo vettore di $\mathcal{B}$.

DEF. La $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ si dice la MATRICE ASSOCIATA ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$.

[scriveremo solo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ se f è sottintesa]

<u>Teorema 2</u> Si ha:

$$\boxed{[f(\underline{v})]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} [\underline{v}]_{\mathcal{B}}}$$

<u>dim</u>. La 3) scritta sopra si può riscrivere:

$$[f(\underline{v})]_{\mathcal{B}'} = \left[[f(\underline{v}_1)]_{\mathcal{B}'} \cdots\cdots [f(\underline{v}_n)]_{\mathcal{B}'} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{tikzcd}
\underline{v} \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "f"] & {[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[d, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}"] \\
f(\underline{v}) \arrow[r, squiggly] & {[f(\underline{v})]_{\mathcal{B}'}}
\end{tikzcd}$$

Quindi alla $f: V \longrightarrow W$, fissate basi, possiamo associare la $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, che agisce per moltiplicazione tramite la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ sopra costruita; in formula:

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\underline{x}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot \underline{x}$$

(Le notazioni piuttosto "pesanti" sono qui necessarie anche per ricordarsi che tutte queste costruzioni dipendono dalle basi fissate; quando tali basi sono chiare dal contesto, non le indichiamo).

Schematicamente:

prodotto riga x colonne

$$\underline{v} = \sum_{i=1} x_i \underline{v}_i = [\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n] [\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in V$$

$$f(\underline{v}) = [f(\underline{v}_1) \cdots f(\underline{v}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m] [f(\underline{v})]_{\mathcal{B}'} \in W$$

Scrivendo:

$$f(\underline{v}_j) = [\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m] \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = [\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m] [f(\underline{v}_j)]_{\mathcal{B}'}$$ si trova

$$\left[f(\underline{v}_1) \cdots f(\underline{v}_n) \right] = \left[\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m \right] \left[\left[f(\underline{v}_1) \right]_{\mathcal{B}'} \cdots \left[f(\underline{v}_n) \right]_{\mathcal{B}'} \right] =$$

$$= \left[\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m \right] M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$$

e sostituendo:

$$f(\underline{v}) = \left[\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m \right] \left[f(\underline{v}) \right]_{\mathcal{B}'} = \left[\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m \right] M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \left[\underline{v} \right]_{\mathcal{B}}$$

da cui si ritrova che le coordinate $\underline{y} \in \mathbb{K}^m$ di $f(\underline{v})$ sono collegate alle coordinate $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$ di $\underline{v}$ da:

$$\underline{y} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \underline{x}$$

Esempi. 1) rotazione di angolo θ in $\mathbb{R}^2$

2) rotazione in $\mathbb{R}^3$ attorno all'asse z di angolo θ.

3) $\mathbb{K}_2[x] \to \mathbb{K}_3[x]$: $p(x) \to (x-1)\,p(x) + p(0)$

4) $X \to AX - XA$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

trovare le matrici associate rispetto alle basi canoniche.

Siano V, W, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ come sopra, e siano

$f, g \in L(V, W)$ due appl. lineari. Si ha:

<u>Lemma</u>. (i) $\quad M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f+g) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) + M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(g)$;

(ii) $\quad M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$, $\quad \alpha \in \mathbb{K}$.

<u>Infatti</u>: la j-sima colonna di $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f+g)$ è data per costruzione da $[(f+g)(\underline{v}_j)]_{\mathcal{B}'}$ e per def. di $f+g$ questa vale $[f(\underline{v}_j)+g(\underline{v}_j)]_{\mathcal{B}'}$; per il teo. 1 quest'ultima vale

$[f(\underline{v}_j)]_{\mathcal{B}'} + [g(\underline{v}_j)]_{\mathcal{B}'}$ e questa è la somma delle j-sime

colonne di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ e di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(g)$, il che dimostra (i).
La dim. di (ii) è del tutto analoga.

Ne segue:

<u>Teorema</u>. Siano V, W sp. vett. su $\mathbb{K}$, di dimensioni n, m rispettivamente. Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V e $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ una base di W. L'applicazione:

$$f \longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$$

è un isomorfismo tra $\mathcal{L}(V, W)$ e $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

---

dim Il lemma precedente prova che l'applicazione $f \longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ è lineare.

È iniettiva: se $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ è la matrice nulla, per il teo 2 f è l'applicazione nulla (quella che manda tutto in $\underline{0}$).

È surgettiva: sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$; sia $f : V \longrightarrow W$ l'unica appl. lineare tale che $f(\underline{v}_j)$ è il vettore di W di coordinate (rispetto a $\mathcal{B}'$) $[f(\underline{v}_j)]_{\mathcal{B}'} = A^j$ (la j-sima colonna di A), $j=1,\dots,n$.

Allora per costruzione $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = A$.

Corollario $\dim \mathcal{L}(V,W) = mn$

Osservazione. Si può analogamente dire che l'applicazione che manda $f: V \longrightarrow W$ in $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ è un isomorfismo tra

$\mathcal{L}(V,W)$ e $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)$

(ce n'è uno per ogni scelta delle basi).

Esempi ed esercizi.

1) Riprendiamo l'esempio 4 di qualche pagina fa: $f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ data da $X \to AX - XA$, con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Usiamo le coordinate per determinare basi (e quindi dimensioni) di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

Rispetto alle basi canoniche date dalle matrici $\underline{e}_{ij}$ aventi 1 in posizione i,j, e 0 altrove, la matrice associata (sia $\mathcal{B} = \{ \underline{e}_{ij}, \ i,j = 1,2 \}$) si calcola così:

$$f(\underline{e}_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left[\underline{e}_{11} \ \underline{e}_{12} \ \underline{e}_{21} \ \underline{e}_{22} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(\underline{e}_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}_{11} & \underline{e}_{12} & \underline{e}_{21} & \underline{e}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(\underline{e}_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}_{11} & \underline{e}_{12} & \underline{e}_{21} & \underline{e}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$f(\underline{e}_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}_{11} & \underline{e}_{12} & \underline{e}_{21} & \underline{e}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per brevità chiamo M questa matrice.

Per quanto sopra visto, la f agisce prendendo un "vettore" (che in questo caso è una matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$) che ha coordinate $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ rispetto a $\mathcal{B}$, e mandandolo nel "vettore" $f(X) \in M_2(\mathbb{R})$ le cui coordinate $\underline{y} \in \mathbb{R}^4$ (rispetto a $\mathcal{B}$) si trovano moltiplicando $\underline{x}$ per la matrice M: $\underline{y} = M\underline{x}$. Quindi posso studiare la $f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ utilizzando la

$[f]: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \; : \; \underline{x} \longrightarrow M\underline{x}$.

Ad es., determiniamo base per $\mathrm{Im}\, f$ e per $\mathrm{Ker}\, f$.

Sappiamo che $\mathrm{Im}\,[f] = \mathcal{C}(M) = \mathrm{Span}(\text{colonne})$ e $\mathrm{Ker}[f] =$
$=$ soluzioni di $M\underline{x} = \underline{0}$.

Si può trovare tutto facilmente da una riduzione a scala di M:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Segue</u>: (1) $\text{rg}\, M = 2 = \text{rg}\, f$ $(= \dim \text{Im} f)$

(2) $\text{Im}[f] = \mathcal{C}(M)$ ha base le prime due colonne di M (quelle dei pivot) e quindi una base per $\text{Im}(f)$ è data da:

Base per Im f:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \underline{e}_{11} & \underline{e}_{12} & \underline{e}_{21} & \underline{e}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \underline{e}_{11} & \underline{e}_{12} & \underline{e}_{21} & \underline{e}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) $\mathrm{Ker}[f] = \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$ ha base:

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

quindi:

Base per Ker f:

$$C_1 = [\underline{e}_{11} \ \underline{e}_{12} \ \underline{e}_{21} \ \underline{e}_{22}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [\underline{e}_{11} \ \underline{e}_{12} \ \underline{e}_{21} \ \underline{e}_{22}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>nota</u>: $\ker f$ è dato da tutte le matrici che commutano (rispetto al prodotto righe × colonne) con la data A.

Perchè ci si doveva aspettare che $\dim \ker f \geq 2$?

---

2) Sia $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}^5$, e siano $U \subset V$ sottospazio di dimensione 2 e $Z \subset W$ sottospazio di dim 3.

a) Dimostrare che $\mathcal{F} = \{ f : V \to W \mid f(U) \subset Z \}$ è sottosp. vettoriale di $\mathcal{L}(V, W)$.

<u>dim</u> Se $f, g \in \mathcal{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha, $\forall \underline{v} \in U$, $(\alpha f + \beta g)(\underline{v}) =$
$\alpha f(\underline{v}) + \beta g(\underline{v})$; poichè per ipotesi $f(\underline{v}) \in Z$, $g(\underline{v}) \in Z$, e Z è sottosp.

vettoriale di W, segue $\alpha f(\underline{v}) + \beta g(\underline{v}) \in Z$, che dim. la tesi.

6) Calcolare $\dim \mathcal{F}$.

Si scelga una base di V estendendone una di U:
$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$, con $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ base di U.
Si scelga inoltre una base di W estendendone una di Z:
$\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4, \underline{w}_5\}$, con $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ base di Z.

Da come si costruisce $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$, si ha che $f \in \mathcal{F} \iff$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ ha la forma

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} \end{bmatrix}$$

perché $f(U) \subset Z \iff$
$f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2) \in Z \iff$
$[f(\underline{v}_1)]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}, [f(\underline{v}_2)]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$
hanno componenti non nulle solo lungo la base
$\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ di $Z \iff$
$a_{41} = a_{51} = a_{42} = a_{52} = 0$

Quindi:

$$\dim \mathcal{F} = \dim \{ A \in \mathcal{M}_{5,4}(\mathbb{R}) \mid a_{41} = a_{51} = a_{42} = a_{52} = 0 \} = 20 - 4 = 16$$

[dimostrarlo!]

es.: Esibire (in qualche modo) una base di $\mathcal{F}$.

Esercizi simili a 2.

1) $\mathcal{F} = \{ f : V \to W \mid \operatorname{Ker} f \supset U \}$ è sottosp. vett. di $\mathcal{L}(V, W)$. Dimostrarlo e trovarne la dimensione (e una base)

2) Analoghe domande per

- $\mathcal{F} = \{ f : V \to W \mid \operatorname{Im} f \subset Z \}$

- $\mathcal{F} = \{ f : V \to W \mid \operatorname{Ker} f \supset U,\ \operatorname{Im} f \subset Z \}$