LEZIONE DEL 31/10/2013

Prop 1. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ sono linearm. indip. $\iff$

$$\dim(\mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}) = n$$

[$A \subset V$ lin. ind. $\iff$ $\dim(\mathrm{Span}\, A) = \# A$]

Prop. 2 $\underline{v} \in \mathrm{Span}(\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}) \iff$

$$\dim(\mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}\}) = \dim(\mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\})$$

[$\underline{v} \in \mathrm{Span}(A) \iff \mathrm{Span}(A \cup \{\underline{v}\}) = \mathrm{Span}(A)$

$\iff \dim \mathrm{Span}(A \cup \{\underline{v}\}) = \dim(\mathrm{Span}(A))$]

DIM. ESERCIZIO.

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

RIGA i-sima:

$$A_i = [a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{in}] \in \mathbb{K}^n, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

è composta da

m vettori riga $\in \mathbb{K}^n$

COLONNA j-sima:

$$A^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^m \quad , \; j = 1, \dots, n$$

$$A = \left[A^1 \; A^2 \cdots A^j \cdots A^n \right]$$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è composta da n vettori colonna es $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$

RIGHE: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$A_1, A_2 \in \mathbb{R}^4$

COLONNE:

$A^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $A^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; $A^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $A^4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 \end{bmatrix}$$

DEF. DATA $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, SI DEFINISCE LO

SPAZIO RIGA DI $A :=$ $\mathcal{R}(A) = \text{Span}(A_1, \dots, A_m) \subset \mathbb{K}^n$

SPAZIO COLONNA DI $A :=$ $\mathcal{C}(A) = \text{Span}(A^1, \dots, A^n) \subset \mathbb{K}^m$

es: $\mathcal{R}(A) =$

$$= \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$\mathcal{C}(A) =$$

$$\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

MOLTIPLICAZIONE RIGHE x COLONNE

Due vettori $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^n$ si possono 'moltiplicare':

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$, definiamo

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Data $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ [#colonne A = #righe B]

si definisce

$$AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}) \text{ come la matrice}$$

$$C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}} \quad \text{con} \quad \boxed{\begin{aligned} c_{ij} &= \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}^j \\ &= a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{in} b_{nj} \end{aligned}}$$

anche:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$(M)_{ij}$: elemento di posizione (i,j) della matrice M.

$$\begin{bmatrix} \text{——} A_1 \text{——} \\ \text{——} A_2 \text{——} \\ \text{——} A_3 \text{——} \\ \text{——} A_4 \text{——} \\ \text{——} A_5 \text{——} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \big| & \big| & \big| \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ \big| & \big| & \big| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & A_1 \cdot B^3 \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & A_2 \cdot B^3 \\ A_3 \cdot B^1 & A_3 \cdot B^2 & A_3 \cdot B^3 \\ A_4 \cdot B^1 & A_4 \cdot B^2 & A_4 \cdot B^3 \\ A_5 \cdot B^1 & A_5 \cdot B^2 & A_5 \cdot B^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 8 & -6 \end{bmatrix}$$

PROPRIETÀ

1. $A(B+C) = AB+AC$ quando si può fare,

cioè: $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B, C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

e similmente:

$(A+B)C = AC+BC$ quando

$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

---

dim $\quad A_i(B^j + C^j) = \sum_{l=1}^{n} a_{il}(b_{lj} + c_{lj}) =$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} + \sum_{l=1}^{n} a_{il} c_{lj} = A_i B^j + A_i C^j$$

2. Se $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, allora:

$$(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$$

<u>dim</u>. $\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_{ik}) b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\alpha b_{kj}) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

---

3. Se $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

allora
$$(AB)C = A(BC)$$

<u>dim</u>. $\sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} C_{kj} =$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hk} \right) c_{kj} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{hk} c_{kj} \right) =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} (A)_{ih} \, (BC)_{hj}$$

4. $\quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \quad$ se A e B si possono moltiplicare (cioè $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

<u>dim</u>

$$ {}^t(AB)_{ij} = (AB)_{ji} = A_j \cdot B^i = ({}^tB)_i \, ({}^tA)^j = ({}^tB\,{}^tA)_{ij} $$

[es.: ridimostrarlo usando le sommatorie]

Def. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si dice anche che A ha <u>ordine n</u>

Oss. Due matrici quadrate dello stesso ordine n si possono moltiplicare: $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Con l'operazione di prodotto righe $\times$ colonne $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diventa un <u>anello</u> [oltre ad essere come sappiamo spazio vettoriale]

- Per $n=1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si identifica con $\mathbb{K}$ (quindi è un campo).

- L' identità moltiplicativa è data dalla matrice [detta MATRICE IDENTITÀ]

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

avente 1 sulla DIAGONALE PRINCIPALE e 0 fuori

[elementi di posto i,i
$i = 1, \dots, n$.]

es:
$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

---

oss 1 Il prodotto di 2 matrici non commuta in generale: esempio:

$$\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}$$

oss 2. Non tutte le $A \in M_n(\mathbb{K})$ risultano avere inverso moltiplicativo:

esempio:

sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Cerchiamo $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non c'è soluzione.

invece se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ si ha:

$$A \cdot A = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi in questo caso A ha come inversa moltiplicativa sè stessa.

<u>DEF.</u> UNA MATRICE INVERTIBILE È UNA MATRICE $A \in M_n(\mathbb{K})$ CHE HA INVERSA MOLTIPLICATIVA.

---

cioè $\exists\, B$ t.c. $AB = BA = I$.

Tale B si indica anche con A^{-1}.

5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono invertibili.

dim $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1} I B =$
$= B^{-1}B = I$

dim. che $B^{-1}A^{-1}$ é inversa a destra

PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UN VETTORE

Una matrice di tipo $n \times 1$ si potrà identificare con un vettore (VETTORE COLONNA) di $\mathbb{K}^n$

Data $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\underline{v} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$

si ha:

$$A\underline{v} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^m$$

è vettore colonna

similmente le matrici di tipo $1,m$ $\mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K})$ si identificano a un vettore di $\mathbb{K}^m$ (VETTORE RIGA). Dati:

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \quad \underline{v} \in \mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^m \quad \text{si ha:}$$

$$\underline{v} A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$$

è vettore riga

<u>OSS</u>.

se $\underline{v}$ è vettore colonna con m componenti, allora ${}^t\underline{v}$ è vettore riga con m componenti, quindi si può fare il prodotto ${}^t\underline{v} A$.

es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ $\underline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $A\underline{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$

Se $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$ allora $A\underline{v} = \begin{bmatrix} A_1 \cdot \underline{v} \\ \vdots \\ A_m \cdot \underline{v} \end{bmatrix}$

---

oss. E' molto utile vedere il prodotto $A\underline{v}$ anche come comb. lineare delle colonne di A.

$$A\underline{v} = \left[v_1 A^1 + \dots + v_n A^n \right]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

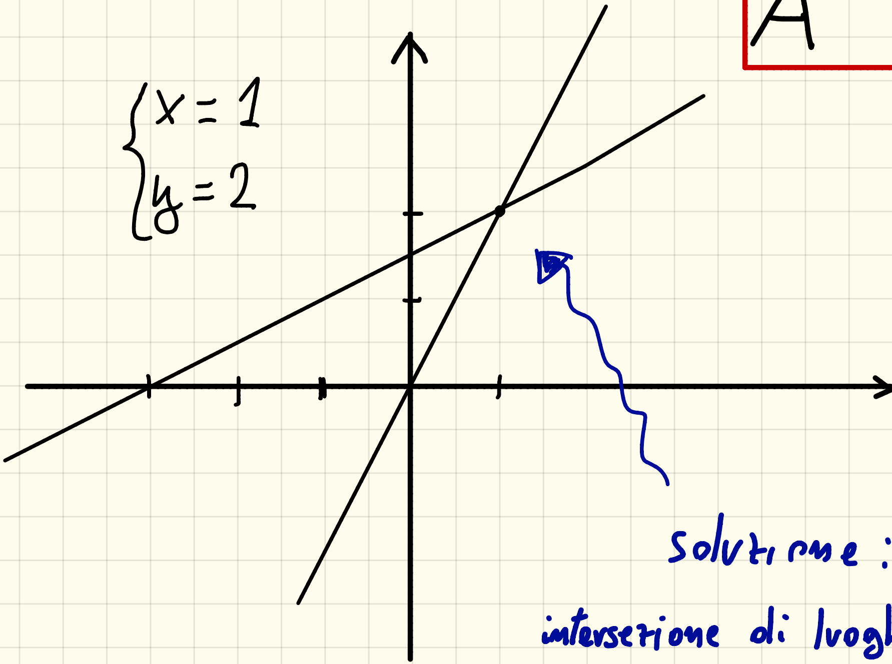
SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A \quad \underline{x} \quad = \quad \underline{b}}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

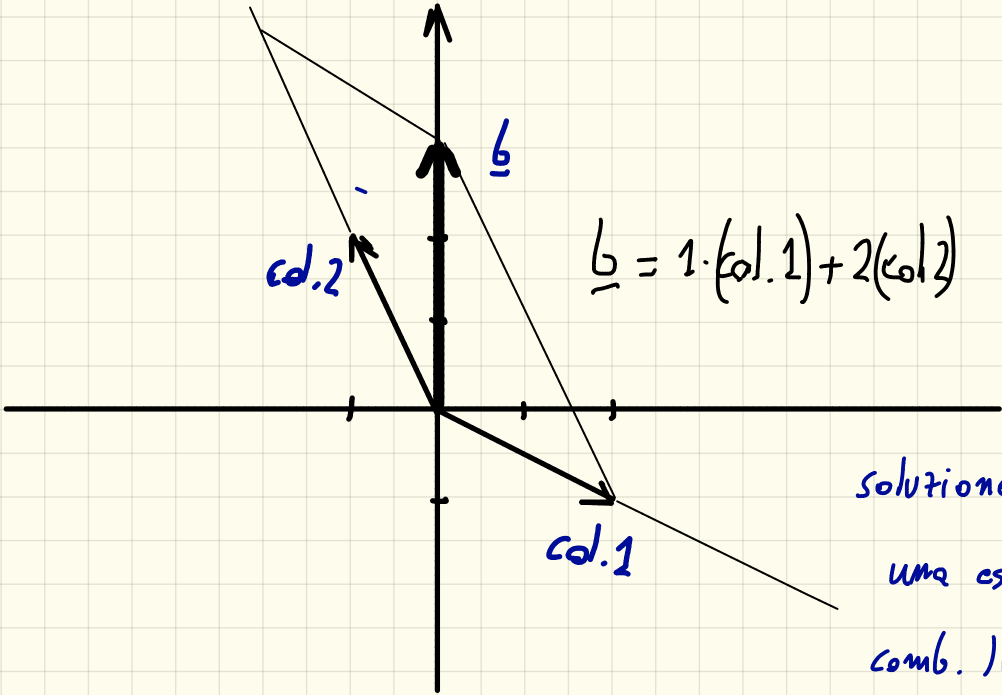


soluzione:

intersezione di luoghi di zeri

FIGURA
PER
RIGHE

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$



$\underline{b} = 1\cdot(\text{col}.1)+2(\text{col}.2)$

FIGURA PER COLONNE

soluzione: coefficienti di una espressione di $\underline{b}$ come comb. lineare delle colonne.

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff$$

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n = \underline{b} \quad (*)$$

<u>oss. 1</u> $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$A^1, \dots, A^n \in \mathbb{K}^n$ siano base

$\Rightarrow \exists$ unica soluzione, $\forall \underline{b}$

oss. 2 $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A^1, \dots, A^n \in \mathbb{K}^m$

sono lin. indip. $\Rightarrow$

se $\exists$ soluzione allora è unica

TEOREMA. $A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile

$$\iff \quad \underline{b} \in \mathrm{Span}(\{A^1, \dots, A^n\})$$

dim è immediata da (*).

$\mathcal{R}(A)$ = spazio generato dalle righe $\subset \mathbb{K}^n$
$\mathcal{C}(A)$ = spazio generato dalle colonne $\subset \mathbb{K}^m$

$$\boxed{\textbf{DEF.} \quad \text{RANGO}(A) = \dim \mathcal{C}(A)}$$

[rango per colonne]

[si può definire il RANGO PER RIGHE = $\dim \mathcal{R}(A)$;
si dimostrerà che coincidono]

TEOREMA [ROUCHÉ - CAPELLI]

$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ È RISOLUBILE $\Longleftrightarrow$

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(\tilde{A})$$

dove $\tilde{A} = [A \,\vdots\, \underline{b}] \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{K})$

è la matrice completa ottenuta aggiungendo ad A il vettore $\underline{b}$ come ultima colonna

---

Dim. In virtù del teorema precedente, e la prop. 2 all'inizio della lez.

SISTEMI OMOGENEI

$$\boxed{A\underline{x} = \underline{0}}$$

$\underline{x} = \underline{0}$ è soluzione

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = \underline{0}$$

oss. $\exists$ soluzione non nulla $\Longleftrightarrow$ $A^1, \dots, A^n$ sono lin. dipendenti

$$S = \{ \underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0} \} \subset \mathbb{K}^n$$

È SOTTOSP. VETT. DI $\mathbb{K}^n$. Infatti

se $\underline{x}, \underline{y} \in S$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$A(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) = \alpha \underbrace{A\underline{x}}_{=\underline{0}} + \beta \underbrace{A\underline{y}}_{=\underline{0}} = \underline{0}$$

PROBLEMA TROVARE dim S e una base di soluzioni

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE: sono operazioni che cambiano il sistema dato in un altro che ha <u>le stesse</u> soluzioni S

I) scambio di righe

II) moltipl. di una riga per un numero

III) Sostituzione della riga A_i con:

$$A_i + \lambda A_j \quad , \lambda \in \mathbb{K}, \quad i \neq j$$

<u>Prop</u>. Queste operazioni non cambiano l'insieme delle soluzioni

RIDUZIONE A SCALA

se $a_{11} \neq 0$ con operazione III azzeriamo la prima colonna sotto a_{11}

$$A \xrightarrow{III} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

se $a_{11} = \cdots = a_{i-1,1} = 0$, ma $a_{i1} \neq 0$, portiamo A_i ad essere la I riga con operazioni I.

$$A \xrightarrow{I} \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

e poi procedo come prima

se la prima colonna è nulla, passo alla seconda.

$$\begin{bmatrix} p_1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & & & & & & & & \\ \vdots & & & & A' & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

RIPETO SU A'

PIVOT

$p_1, \dots, p_K$

$$\begin{bmatrix} p_1 & - & & - \\ 0 & p_2 & & \\ \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ & 0 & & \end{bmatrix}$$

ottengo alla fine:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_2 & * & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_3 & \cdots & & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & \cdots & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & p_{k-1} & * \cdots * & * \cdots * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 \cdots 0 & p_k & \cdots * \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 \cdots & 0 & \cdots 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 \cdots & 0 & \cdots 0
\end{array}\right]$$

p_i: pivot p_i sta nella i-sima riga, $i = 1, \dots, k$

Le righe $k+1, \dots, m$ sono nulle.

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_2 & * & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_3 & \cdots & & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & \cdots & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & p_{k-1} & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & p_k & \cdots\ * \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots\ 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots\ 0
\end{array}\right]
$$

<u>variabili libere:</u> x_j se la j-sima colonna non contiene pivot.

<u>variabili dei pivot:</u> le k-variabili x_j con la j-sima colonna contenente un pivot.

supponiamo ad es. che $A \in \mathcal{M}_{5,6}(\mathbb{R})$ si riduca con operazioni riga a:

$$A \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot: $p_1 = 1$ posizione $1,1$

$p_2 = 2$ " $2,3$

$p_3 = -1$ " $3,4$

variabili libere: x_2, x_5, x_6

dei pivot: x_1, x_3, x_4

<u>asserzione</u>: si possono assegnare valori <u>arbitrari</u> alle variabili libere, e ricavare in <u>modo unico</u> valori per quelle dei pivot.

Infatti il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ equivale al sistema $B\underline{x} = \underline{0}$; nell'esempio:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 + 2x_6 = 0 \\ 2x_3 + x_4 + 2x_6 = 0 \\ -x_4 + x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$$

partendo dal basso, ricavo x_4 e lo sostituisco sopra, ricavo x_3 e infine ricavo x_1.

modo per costruire base di soluzioni: si assegni alle $n-k$ variabili libere

la $(n-k)$-pla di valori $1, 0, \cdots, 0$ e si ricavino le rimanenti variabili;

" $0, 1, 0, \cdots, 0$ "

- - - - - - - - - -

" $0, \cdots\cdots, 0, 1$ "

Si ottengono così $n-k$ soluzioni particolari del sistema.

---

nell'esempio: $\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_5 = 1 \\ x_6 = 0 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_1 = -3/2 \\ x_3 = -1/2 \\ x_4 = 1 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_1 = -7/2 \\ x_3 = -3/2 \\ x_4 = 1 \end{matrix}$

quindi le 3 soluzioni particolari sono:

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{v}_5 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{v}_6 = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{v}_2, \underline{v}_5, \underline{v}_6$

(usiamo gli indici delle colonne libere)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{v}_5 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{v}_6 = \begin{bmatrix} -4/2 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PROP. Queste $n-k$ soluzioni sono una base dello spazio delle soluzioni del dato sistema $A\underline{x}=\underline{0}$.

---

dim Siano $j_1, \dots, j_{n-k}$ gli indici delle colonne libere (non contenenti pivot) e siano $\underline{v}_{j_1}, \dots, \underline{v}_{j_{n-k}}$ $n-k$ vettori costruiti come sopra. Sono linearmente indip.:

Infatti sia: $\sum_{h=1}^{n-k} \alpha_h \underline{v}_{j_h} = \underline{0}$.

Per costruzione in posizione j_1 $\underline{v}_{j_1}$ ha un 1 e gli altri hanno uno 0. Segue $\alpha_1 = 0$.

In posizione j_2 $\underline{v}_{j_2}$ ha un 1 e gli altri hanno uno 0. Segue $\alpha_2 = 0$, e così via si deduce $\alpha_3 = \dots = \alpha_{n-k} = 0$.

Sono generatori dello spazio delle soluzioni. Infatti, sia $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ soluzione. Il vettore

$$\underline{v} = \sum_{h=1}^{n-k} a_{j_h} \underline{v}_{j_h}$$

ha le stesse componenti libere di $\underline{a}$ (ossia le stesse componenti nelle posizioni $j_1, \dots, j_{n-k}$). Ma come osservato sopra le componenti non-libere di una soluzione sono determinate unicamente da quelle libere. Quindi $\underline{v} = \underline{a}$.

Forma a scala <u>ridotta</u>.

Possiamo moltiplicare la riga che contiene il pivot p_i per p_i^{-1} (operaz. di tipo II). Possiamo poi azzerare (op. di tipo III) anche gli elementi che stanno sopra al pivot (oltre a quelli sotto).

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * & 0 & & 0 & & 0 & 0 \\
 & & & 1 & * \quad * & 0 & & 0 & 0 \\
 & & & 0 & & 1 & * \quad * & 0 & 0 \\
 & & & \vdots & & 0 & & 1 & 0 \\
 & & & & & \vdots & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & \vdots & 0 \\
 & & & & & & & & \vdots
\end{array}\right]
$$

Ad es.:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 2^a \text{ col} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ 5^a \text{ col} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7/2 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1^a \\ \\ 3^a \\ 4^a \\ \\ \leftarrow 6^a \text{ col} \end{array}$$

<u>Base</u>. Si prende una colonna delle variabili libere, ad es. la j-sima. I primi n-elementi di questa colonna (cambiati di segno) si mettono nelle posizioni di pivot, e si mette 1 in posizione j e 0 nelle rimanenti posizioni