Lezione del 3/4/2014

Abbiamo introdotto le AFFINITÀ:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad , \quad f(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t} \quad , \ M \in GL_n(\mathbb{R}) \ , \ \underline{t} \in \mathbb{R}^n$$

(quindi f è la composizione dell'applicazione lineare $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(\underline{x}) = M\underline{x}$, con la traslazione $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{t}$)

Definiamo una ISOMETRIA di $\mathbb{R}^n$ come un'affinità che conserva le distanze.

Siccome le traslazioni sono isometrie, se $f = T \circ g$ (composizione) con T traslazione e g lineare, e f è isometria, allora anche $g = T^{-1} \circ f$ deve essere isometria (se $T(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{t}$ è traslazione, allora $T^{-1}(\underline{x}) = \underline{x} - \underline{t}$ è l'inversa di T rispetto alla composizione).

Per quanto detto la volta scorsa risulta pertanto $M \in O(n)$, quindi un'isometria è una trasformazione del tipo: $\underline{x} \to M\underline{x} + \underline{t}$, $M \in O(n)$, $\underline{t} \in \mathbb{R}^n$.

Denotiamo con $Aff(\mathbb{R}^n)$ il gruppo delle affinità di $\mathbb{R}^n$;
con $Iso(\mathbb{R}^n)$ il gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^n$.

Per un sottospazio affine $S = W + \underline{t}$ di direzione W, è naturale definire la <u>dimensione</u> di S come la dimensione di W
(ri-osserviamo che S <u>non</u> è sp. vettoriale!)

<u>Esercizio</u>. Le affinità mandano sottospazi affini in sottospazi affini della stessa dimensione.

---

a meno che $\underline{t} = \underline{0}$ o più in generale $\underline{t} \in W$

Se $\underline{t} \in W \Rightarrow W + \underline{t} = W$

Classificazione affine delle coniche reali.

Sia $P(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \mu$

Sia $\quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x,y) = 0\}$. Si è visto che, posto $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\underline{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

si ha:

$$P(\underline{x}) = {}^t\underline{x}\, A\, \underline{x} + 2\, {}^t\underline{b} \cdot \underline{x} + \mu \,, \qquad (1)$$

con $\quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{bmatrix}$; $\quad$ e anche

$$P(\underline{x}) = {}^t\underline{\tilde{x}}\, \tilde{A}\, \underline{\tilde{x}} \,, \qquad (2)$$

con $\quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \mu \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline {}^t\underline{b} & \mu \end{array}\right]$

Sia $f(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t}$ una affinità. Come cambia l'equazione della conica operando la trasformazione di coordinate $\underline{x} = f(\underline{x}')$? $\underline{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

Utilizzando la formula (1):

$$P(\underline{x}) = P(M\underline{x}' + \underline{t}) = {}^t(M\underline{x}' + \underline{t})\, A\, (M\underline{x}' + \underline{t}) + 2\,{}^t\underline{b}\,(M\underline{x}' + \underline{t}) + \mu =$$

$$= {}^t\underline{x}'\,{}^tMAM\,\underline{x}' + {}^t\underline{x}'\,{}^tMA\,\underline{t} + {}^t\underline{t}\,AM\,\underline{x}' + {}^t\underline{t}\,A\,\underline{t} + 2\,{}^t\underline{b}\,M\underline{x}' + 2\,{}^t\underline{b}\,\underline{t} + \mu$$

$$= {}^t\underline{x}'\,{}^tMAM\,\underline{x}' + 2\,{}^t\left[{}^tM\,(A\underline{t} + \underline{b})\right]\underline{x}' + {}^t\underline{t}\,A\,\underline{t} + 2\,{}^t\underline{b}\,\underline{t} + \mu$$

Se chiamiamo A', $\underline{b}'$, μ' i nuovi coeff. nelle coordinate $\underline{x}'$, cioè:

$$P'(\underline{x}') = P(M\underline{x} + \underline{t}) = {}^t\underline{x}'\,A'\,\underline{x}' + 2\,{}^t\underline{b}'\,\underline{x}' + \mu'$$

allora:

$${}^t\underline{t}\, A M \underline{x}' + {}^t\underline{t}\, A M \underline{x}' + 2\,{}^t\underline{b}\, M \underline{x}' =$$

$$2\,{}^t\underline{t}\, A M \underline{x}' + 2\,{}^t\underline{b}\, M \underline{x}' =$$

$$2\left[\left({}^t\underline{t}\, A M + {}^t\underline{b}\, M\right) \underline{x}'\right] =$$

$$= 2\left[{}^t\left({}^tM\, A\, \underline{t} + {}^tM\, \underline{b}\right) \underline{x}'\right] =$$

$$= 2\,{}^t\left[{}^tM\left(A\underline{t} + \underline{b}\right)\right] \underline{x}'$$

$$A' = {}^t M A M$$

$$\underline{b}' = {}^t M (A\underline{t} + \underline{b})$$

$$\mu' = {}^t\underline{t} A \underline{t} + 2\, {}^t\underline{b}\, \underline{t} + \mu = P(\underline{t})$$

Se utilizziamo le formule (2) con matrici di ordine 3 ponendo $\tilde{\underline{x}}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$, si deduce che la nuova matrice è:

$$\tilde{A}' = \begin{bmatrix} A' & \underline{b}' \\ {}^t\underline{b}' & \mu' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} {}^t M A M & {}^t M (A\underline{t} + \underline{b}) \\ \hline {}^t[{}^t M (A\underline{t} + \underline{b})] & P(\underline{t}) \end{array}\right]$$

oss Se poniamo $\tilde{M} = \left[\begin{array}{c|c} M & \underline{t} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right]$ allora risulta:

$$\tilde{\hat{A}}' = {}^t\tilde{M}\,\hat{A}\,\tilde{M}$$

Infatti:

$$\left[\begin{array}{c|c} {}^tM & \underline{0} \\ \hline {}^t\underline{t} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline {}^t\underline{b} & \mu \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} M & \underline{t} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} {}^tMA & {}^tM\underline{b} \\ \hline {}^t\underline{t}A+{}^t\underline{b} & {}^t\underline{t}\,\underline{b}+\mu \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} M & \underline{t} \\ \hline \underline{0} & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} {}^tMAM & {}^tMA\underline{t}+{}^tM\underline{b} \\ \hline \hat{a}_{11} \quad \hat{a}_{23} & {}^t\underline{t}A\underline{t}+2\,{}^t\underline{b}\,\underline{t}+\mu \end{array}\right]$$

$rk\,\tilde{\hat{A}}$

$rk\,A$

$s(\hat{A})$, $s(A)$

quindi: il gruppo delle affinità $Aff(\mathbb{R}^2)$ è rappresentabile come il gruppo delle matrici

$$\left[\begin{array}{c|c} M & \underline{t} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} M \in GL_2(\mathbb{R}) \\ \underline{t} \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Analogamente, $Iso(\mathbb{R}^2)$ si rappresenta come

$$\left[\begin{array}{c|c} M & \underline{t} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] , \qquad M \in O(2)$$

Caso traslazione $T: \underline{x} \to \underline{x} + \underline{t} = I\underline{x} + \underline{t}$

$$A' = A$$

$$\underline{b}' = A\underline{t} + \underline{b}$$

$$\mu' = P(\underline{t}) = {}^t\underline{t} A \underline{t} + 2\,{}^t\underline{b}\,\underline{t} + \mu$$

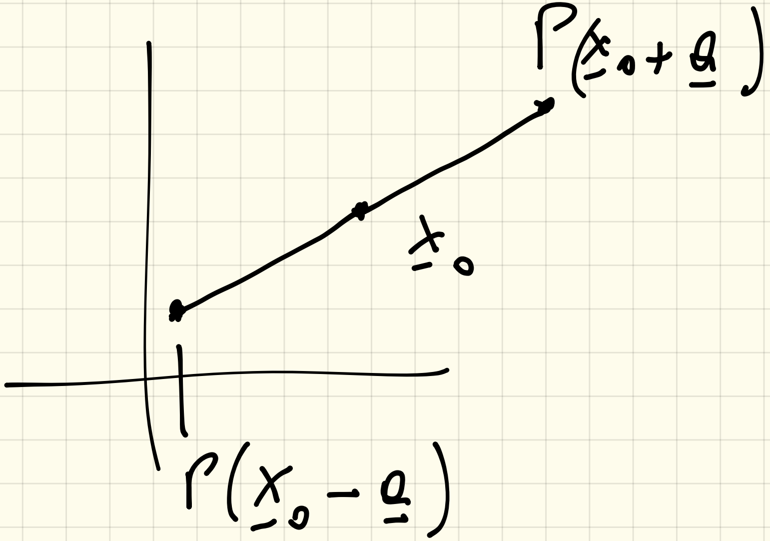
$$\left[\begin{array}{c|c} I & \underline{t} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

traslazione

$$\tilde{A}' = \left[\begin{array}{c|c} A & A\underline{t} + \underline{b} \\ \hline {}^t(A\underline{t} + \underline{b}) & P(\underline{t}) \end{array}\right]$$

def. C si dice A CENTRO se $\exists\ \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$$P(\underline{x}_0 + \underline{a}) = P(\underline{x}_0 - \underline{a}) \qquad \forall\, \underline{a} \in \mathbb{R}^2$$



$\underline{x}_0$ si dice centro di simmetria on $\underline{O}$ è centro di simmetria di $P(\underline{x}) \iff P(\underline{x}) = P(-\underline{x}), \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \iff P$ non ha termini di grado 1.

Infatti:

$$P(\underline{x}) = {}^t\underline{x} A \underline{x} + 2\,{}^t\underline{b}\,\underline{x} + \mu$$

$$P(-\underline{x}) = {}^t(-\underline{x}) A (-\underline{x}) + 2\,{}^t\underline{b}(-\underline{x}) + \mu = {}^t\underline{x} A \underline{x} - 2\,{}^t\underline{b}\,\underline{x} + \mu$$

$$P(\underline{x}) = P(-\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \iff {}^t\underline{b}\,\underline{x} = -{}^t\underline{b}\,\underline{x}, \quad \forall \underline{x}$$

$$\iff 2\,{}^t\underline{b} \cdot \underline{x} = 0 \quad \forall \underline{x}$$

$$\iff \underline{b} = \underline{O}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & 1 & \\ \hline & & -1 \end{array}\right)$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 - y = 0 \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

oss Se $\underline{x}_0$ è centro di simmetria della conica allora, traslando $\underline{x}_0$ nell'origine, la nuova conica avrà $\underline{0}$ come centro di simmetria. In altri termini, se

$$P(\underline{x}_0+\underline{e}) = P(\underline{x}_0-\underline{e}) \quad \forall \underline{e} \in \mathbb{R}^n$$

e si fa la traslazione $\underline{x} = \underline{x}' + \underline{x}_0$ allora:

$$P'(\underline{x}') = P(\underline{x}'+\underline{x}_0) \quad \text{è il nuovo polinomio in } \underline{x}'$$

e vale: $P'(-\underline{x}') = P(-\underline{x}'+\underline{x}_0) = P(\underline{x}'+\underline{x}_0) = P'(\underline{x}')$

Riassumendo: se rispetto alle coordinate $\underline{x}$ la conica C ha centro $\underline{x}_0$, rispetto alle $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_0$ ha centro $\underline{0}$.

Per quanto sopra detto, si può quindi affermare:

C è a centro x_0 $\Longleftrightarrow$ la traslazione $\underline{x} = \underline{x}' + \underline{x}_0$ annulla i termini di grado 1, cioè la nuova matrice diventa del tipo

$$\tilde{A}' = \left[\begin{array}{c|c} A & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \mu' \end{array}\right]$$

$\Longleftrightarrow$ [per quanto visto sopra] $\underline{x}_0$ risolve $A\underline{x}_0 + \underline{b} = \underline{0}$

Riassumendo: C è a centro $\Longleftrightarrow$ è risolubile il sistema

$$A\underline{t} + \underline{b} = \underline{0} \quad \left(\Longleftrightarrow \underline{b} \in \operatorname{Im} A \Longleftrightarrow \operatorname{rg}[A \vdots \underline{b}] = \operatorname{rg} A \right)$$

I centri delle coniche risolvono (*)

e quindi costituiscono un sottospazio affine

(o 1 punto [ellisse, iperbole, coppie di rette incidenti]

o 1 retta [coppie di rette parallele])

Se A è non sing. $\Rightarrow$ la conica è a centro, ed $\exists\, 1$ sola soluzione del sistema $\Leftarrow$ 1 solo centro.

Luogo dei centri = soluzioni di

$$A\underline{t} = -\underline{b}$$

$rg A \geq 1$ perché ci sono termini di grado 2.

centri:
- 1 punto
- 1 retta
- $\emptyset$ non è a centro

$y = x^2$ $\qquad x^2 - y = 0$

$$(x, y)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\left(0 \ -\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$A\,\underline{t} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

non è risolubile

Distinzione: coniche a centro
non a centro

Invarianti:

$$\tilde{\hat{A}}' = {}^t\tilde{\hat{M}}\,\hat{A}\,\tilde{\hat{M}} \qquad \underline{\text{congruenza}}$$

1) rango $\tilde{\hat{A}}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{\underline{Def}. Conica si dice NON DEGENERE se} \\ \text{rango } \hat{A} = 3 \ (\Leftrightarrow \det \hat{A} \neq 0)\end{array}}$$

la segnatura è invariante per congruenza.

$P(\underline{x}) = 0$

moltiplicando per $\alpha \neq 0$ la conica non cambia

Se moltiplico per $\alpha < 0$

$(i_+, i_-, i_0) \longrightarrow (i_-, i_+, i_0)$

$(2, 1, 0) \longrightarrow (1, 2, 0)$

$|2-1| = |1-2|$ $\quad |i_+ - i_-| =$
$= |i_- - i_+|$

Data M simmetrica, definiamo $s(M) = i_+(M) - i_-(M)$ come la differenza tra l'indice di positività e quello di negatività del prodotto scalare $(\underline{x}, \underline{y}) \to {}^t\underline{x} M \underline{y}$ associato a M.

Per quanto detto sopra, $|s(\tilde{A})| = |i_+(\tilde{A}) - i_-(\tilde{A})|$ è un invariante della conica.

Similmente, $|s(A)| = |i_+(A) - i_-(A)|$ è invariante della conica perché anche A si trasforma per congruenza.

Inoltre, la moltiplicazione per un numero negativo cambia il segno di $\det \tilde{A}$ (che ha ordine 3) ma non cambia il segno di $\det A$ (che ha ordine 2). Quindi anche $\det A$ è un invariante della conica.

Teorema. Ogni conica è affinemente equivalente a una e una sola delle coniche nella tabella.

---

dim (unicità): due coniche nella tabella non sono affinemente equivalenti.

È una semplice verifica: due righe della tabella hanno almeno un invariante diverso

Vediamo ora come una qualunque conica

$$C = \{ P(x,y) = 0 \} = \{ {}^t\hat{x} \hat{A} \hat{x} = 0 \}$$

si riduce ad una di quelle della tabella.

1) Si vede prima di tutto se C è a centro o no; cioè se è risolubile $A\underline{t} = -\underline{b}$ (cioè, per Rouché-Capelli, se $rg(A \vdots \underline{b}) = rg(A)$).

2) Supponiamo che sia a centro. Allora con una traslazione $\underline{t}$ che risolve $A\underline{t} = -\underline{b}$, si eliminano i termini di grado 1, riducendoci alla forma:

$$ {}^t\underline{x} A \underline{x} + p' = 0$$

dove $p' = P(\underline{t})$.

Con un cambiamento lineare $\underline{x} \to M\underline{x}$ si rimane lo stesso e possiamo diagonalizzare A, riducendola ad una tra:

$$I, \; -I, \; \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \; \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

Se

$$\operatorname{rg} \hat{A}' = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & p' \end{array} \right) = 3 \quad (\iff \det A \neq 0, \; P(\underline{t}) \neq 0)$$

allora la conica è <u>non-degenere</u> a centro.

Le prime due sono equivalenti per moltiplicazione per -1 $(|S(I)| = |S(-I)|)$ così come lo sono la 3ª e la 4ª. Se ci si riduce a una delle prime 2, cioè $x^2 + y^2 + c = 0$, siamo nel caso di una ellisse reale $(c<0)$ oppure immaginaria $(c>0)$. La 3ª o quarta danno $x^2 - y^2 + c = 0$, che (sia che $c>0$ o $c<0$) danno iperbole.

Se $rg\,\hat{A} < 3$ (C degenere) allora può essere

- $rg\,A = 2$: quindi $p' = 0$

e $x^2 + y^2 = 0$ (due rette complesse coniugate che si intersecano in un pto reale, l'origine).

oppure $x^2 - y^2 = 0$ (due rette reali incidenti in un punto)

- $rg\,A = 1$: per cambio A si riduce a $\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix} -1 & \\ & 0 \end{bmatrix}$, equivalenti per moltiplicazione per -1; le possibilità in questo caso diventano:

$x^2 + c = 0$; se $c < 0$, 2 rette reali parallele;

se $c > 0$, 2 rette complesse parallele:

$c = 0$, 2 rette reali coincidenti ($rg\,\hat{A} = 1$)

Questo esaurisce il caso delle coniche a centro (che sono quindi 8).

3) Se C non ha centro ($\Leftrightarrow$ $\underline{b} \notin \operatorname{Im} A$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg}(A \vdots \underline{b}) > \operatorname{rg} A$)

allora necessariamente $\operatorname{rg} A = 1$ (non può essere $\operatorname{rg} A = 0$ perché qualche termine di grado 2 deve esserci). Con una trasformazione $\underline{x} \to M\underline{x}$ si diagonalizzi A, che assumerà la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (se fosse $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, moltiplichiamo l'equaz. per -1). Allora:

$$\tilde{A}' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & M \end{array}\right].$$

Una traslazione $\underline{t}$ modifica la matrice (come visto sopra) come

$$\hat{A}'' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_1 + b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ \hline t_1+b_1 & b_2 & \mu' \end{array}\right] \leftarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right)$$

$(\mu' = t_1^2 + 2(b_1 t_1 + b_2 t_2) + \mu)$

Prendiamo $t_1 = -b_1$ e notiamo che $b_2 \neq 0$ (altrimenti si annullerebbero i termini di 1° grado e C sarebbe a centro).

Scegliamo allora: $t_2 = (t_1^2 - \mu)/2b_2$, che dà $\mu' = 0$.

Ci si riduce all'equazione:

$$x^2 + 2b_2 y = 0$$

dalla quale si passa alla parabola standard $(x^2 - y = 0)$ con la trasformazione $y = (-1/2b_2) \cdot y'$ $-$

FORME CANONICHE AFFINI DELLE CONICHE REALI.

			$\operatorname{rg}\tilde{A}$	$\lvert s(\tilde{A})\rvert$	$\det(A_{33}) = \det(A)$	$\lvert s(A)\rvert$
$\mathcal{C}_1$	$x^2+y^2-1=0$	ellisse	3	1	>0	2
$\mathcal{C}_2$	$x^2-y^2-1=0$	iperbole	3	1	<0	0
$\mathcal{C}_3$	$x^2-y=0$	parabola	3	1	0	1
$\mathcal{C}_4$	$x^2-y^2=0$	2 rette reali incidenti	2	0	<0	0
$\mathcal{C}_5$	$x^2-1=0$	2 rette parallele distinte	2	0	0	1
$\mathcal{C}_6$	$x^2=0$	2 rette reali coincidenti	1	1	0	1
$\mathcal{C}_7$	$x^2+y^2+1=0$	ellisse immaginaria	3	3	>0	2
$\mathcal{C}_8$	$x^2+y^2=0$	2 rette complesse coniugate e incidenti in 1 punto	2	2	>0	2
$\mathcal{C}_9$	$x^2+1=0$	2 rette complesse coniugate parallele e distinte	2	2	0	1