Soluzioni Scritto Geometria 24/01/2020 (Corso A)

Mattia Puddu
mattiapuddu@icloud.com

24 gennaio 2020

Parte I

1. Dati i tre piani $\pi_1 : x + 2y + z = 6$, $\pi_2 : x + y - 2z = 2$ e $\pi_3 : x + 3y + 4z = k$, trovare, se esistono, i valori del parametro reale k per cui π_1, π_2, π_3

   (a) non si intersecano

   (b) si intersecano esattamente in un punto

   (c) si intersecano in una retta. Scrivere un'equazione parametrica della retta.

Risoluzione Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & k \end{pmatrix}$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, dobbiamo trovare i valori di k per cui le due matrici

(a) hanno rango diverso

(b) hanno lo stesso rango, e tale rango è 3.

(c) hanno lo stesso rango, e tale rango è 2.

Calcoliamo il rango di A : si osserva immediatamente che $\text{rk}(A) \geq 2$ (ad esempio, il minore 2×2 ottenuto sopprimendo l'ultima riga e l'ultima colonna è invertibile) e poiché $\det A = 0$ si ricava che $\text{rk}(A) = 2$. Calcoliamo il rango di B : con semplici operazioni elementari di Gauss ricaviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & k-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & k-10 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza

$$\text{rk}(B) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 10 \\ 3 & \text{se } k \neq 10 \end{cases}$$

Per quanto appena visto, i piani π_1, π_2, π_3

(a) non si intersecano per $k \neq 10$

(b) non si intersecano mai in un solo punto.

(c) si intersecano in una retta quando $k = 10$. Dalla matrice ridotta a scala scritta sopra, si ricavano le relazioni

$$\begin{cases} -y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3z + 4 \\ x = -2y - z + 6 = 5z - 2 \end{cases}$$

Di conseguenza, un'equazione parametrica per la retta intersezione è data da

$$(x, y, z) = (-2, 4, 0) + t(5, -3, 1) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

✓

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è data da

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base

$$\{(1, 1), (-1, 1)\}$$

in partenza e alla base

$$\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

in arrivo.

Risoluzione Osserviamo che

$$f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dunque la matrice richiesta è

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

✓

3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, calcolare il determinante della matrice

$$\mathcal{M}_t = \begin{pmatrix} 0 & t & t & t & t \\ t & t & t & 0 & t \\ t & t & 0 & t & t \\ t & 0 & t & t & t \\ t & t & t & t & 0 \end{pmatrix}$$

Risoluzione Denotiamo con $A \in \mathcal{M}(5, \mathbb{R})$ la matrice i cui coefficienti sono tutti uguali a 1. Scambiando la seconda e la quarta riga, si ha

$$\det(\mathcal{M}_t) = -\det\begin{pmatrix} 0 & t & t & t & t \\ t & 0 & t & t & t \\ t & t & 0 & t & t \\ t & t & t & 0 & t \\ t & t & t & t & 0 \end{pmatrix} = -\det(tA - t\mathcal{I}_5) = -t^5\det(A - \mathcal{I}_5) = -t^5 p_A(1),$$

dove $p_A(t)$ è il polinomio caratteristico della matrice A. Tale matrice ha rango 1, dunque ha autovalore 0 con molteplicità geometrica 4. Inoltre si vede facilmente che 5 è un autovalore per A, e un corrispondente autovettore è dato da $(1, 1, 1, 1, 1)$. Di conseguenza, dato che la molteplicità geometrica di un autovalore è sempre minore o uguale a quella algebrica, l'unica possibilità è che $\mu_a(0) = 4$, $\mu_a(5) = 1$, e il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(x) = -x^4(x - 5).$$

In conclusione $\det(\mathcal{M}_t) = -t^5 p_A(1) = -4t^5$. ✓

4. Date le matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k-2 & 3 & 0 \\ k^2 - 2k & k-1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

stabilire per quali valori del parametro reale k la matrice A_k risulta essere simile a B.

Risoluzione Si verifica facilmente che il polinomio caratteristico di B è

$$p_B(x) = (x - 2)^2(3 - x)$$

e che B è diagonalizzabile. Dunque A_k è simile a B se e solo se è diagonalizzabile, e i suoi autovalori sono $2, 3$ con molteplicità geometrica (e anche algebrica), rispettivamente $2, 1$. Si verifica immediatamente che $p_{A_k}(x) = p_B(x)$, dunque per concludere è sufficiente trovare i valori di k per cui $\mathrm{rk}(A_k - 2\mathcal{I}_3) = 1, \mathrm{rk}(A_k - 3\mathcal{I}_3) = 2$. Osserviamo che

$$A_k - 2\mathcal{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k-2 & 1 & 0 \\ k^2 - 2k & k-1 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}(A_k - 2\mathcal{I}_3) &= \begin{cases} 1 & \text{se } (k-1)(k-2) = k^2 - 2k \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } k = 2 \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Di conseguenza, affinché le due matrici siano simili si ha necessariamente $k = 2$. Poiché

$$\mathrm{rk}(A_2 - 3\mathcal{I}_3) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

per $k = 2$ le matrici A_k, B sono simili. ✓

5. Data la matrice

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

scrivere gli autovalori di A, e le rispettive molteplicità geometriche. Fornire una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori dell'endormorfismo

$$\begin{array}{rccc} f_A: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & v & \mapsto & Av \end{array}$$

e scrivere delle equazioni cartesiane per il sottospazio $\mathrm{Im}\,(f_A)$.

Risoluzione La matrice data è simmetrica, dunque è diagonalizzabile, per il teorema spettrale. In particolare, le molteplicità geometriche dei suoi autovalori coincidono con quelle algebriche. Si trova facilmente che il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = -t^3 + 2t^2 - t = -t(t-1)^2,$$

dunque gli autovalori di A sono $0, 1$ e le rispettive molteplicità algebriche (e anche geometriche) sono $1, 2$. Calcoliamo una base di autovettori per A, trovando una base per $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(6A)$ e $\mathrm{Ker}\,(A - \mathcal{I}_3) = \mathrm{Ker}\,(6A - 6\mathcal{I}_3)$. Riducendo a scala $6A$ e $6A - 6\mathcal{I}_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+2R_1]{R_2-5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Infine, dalla riduzione a scala della matrice $6A$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2+R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava subito

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\,(v_1)$$

$$\mathrm{Ker}\,(A - \mathcal{I}_3) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\,(v_2, v_3)$$

Di conseguenza una base ortonormale di autovettori per f_A è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcoliamo infine un'equazione cartesiana per $\mathrm{Im}\,(f_A)$: scrivendo un generico vettore di $\mathbb{R}^3$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 si ottiene subito

$$f_A(av_1 + bv_2 + cv_3 = bv_2 + cv_3 = \begin{pmatrix} b - 2c \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

da cui si trova che $x - y + 2z = 0$ è un'equazione cartesiana per l'immagine di f_A. ✓

6. Calcolare la segnatura del prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Scrivere una base del radicale.

Risoluzione Per ottenere una base del radicale, e calcolare l'indice di nullità del prodotto scalare, studiamo $\operatorname{Ker}(\mathcal{M})$: riducendo a scala la matrice $\mathcal{M}$ si trova

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{\substack{R_2+2R_1 \\ R_3+R_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_4 - R_3 \\ R_3 - 3R_2}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza, il rango della matrice $\mathcal{M}$ è 3, $i_0 = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{M}) = 1$, e si ricava facilmente che una base del radicale è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Osserviamo che sulla diagonale della matrice $\mathcal{M}$ c'è almeno un coefficiente positivo e un coefficiente negativo, dunque $i_+ \geq 1, i_- \geq 1$. Infine, osserviamo che la restrizione del prodotto scalare al sottospazio generato dai primi due vettori della base canonica ha matrice associata data dal minore ottenuto sopprimendo le ultime due righe e le ultime due colonne, e si verifica facilmente che tale restrizione è definita positiva. Di conseguenza, $i_+ \geq 2$. L'unica possibilità, di conseguenza, è $(i_+, i_-, i_0) = (2, 1, 1)$.

✓

Parte II

Sia V uno $\mathbb{R}-$spazio vettoriale di dimensione finita e sia $N : V \to V$ un'applicazione lineare nilpotente (ovvero esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $N^k = 0$).

1. Dimostrare che l'unico autovalore (complesso) di N è 0.
2. Dimostrare che, dato $\lambda \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \to & V \\ & v & \mapsto & \lambda v - N(v) \end{array}$$

è invertibile se e solo se $\lambda \neq 0$.

3. Supponiamo che V sia munito di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definito positivo e che l'identità

$$\langle Nv, w \rangle = \langle v, Nw \rangle$$

valga per ogni $v, w \in V$. Dimostrare che $N = 0$.

4. Sia $V = \mathbb{R}_6[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 6, e sia $d : V \to V$ l'applicazione lineare derivata. Calcolare, se esiste, $(\mathrm{Id}_V - d)^{-1}(x^6)$.

5. Data una matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, definiamo $\|A\|$ come la somma dei quadrati dei suoi coefficienti. Dimostrare che esiste una successione di basi $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $V = \mathbb{R}_6[x]$ con la seguente proprietà: detta D_n la matrice associata all'applicazione lineare d rispetto alla base $\mathcal{B}_n$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0.$$

Risoluzione Nel seguito, denotiamo con $k \in \mathbb{N}$, il più piccolo intero positivo tale che $N^k = 0$, e poniamo $n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$. A meno di isomorfismo, possiamo supporre, come faremo nel seguito, che $V = \mathbb{R}^n$, e che $N \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.

1. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore per N : per definizione, esiste $v \in V - \{0\}$ tale che $N(v) = \lambda v$. Osserviamo che
$$N^2(v) = N(\lambda v) = \lambda N(v) = \lambda^2 v,$$
e iterando si ricava immediatamente l'identità
$$N^k(v) = \lambda^k v.$$
Per ipotesi, $N^k = 0$, dunque deve aversi $\lambda^k v = 0$. Dato che $v \neq 0$, l'unica possibilità è che $\lambda^k = 0$, e in $\mathbb{C}$ questo è possibile se e solo se $\lambda = 0$.

2. Osserviamo che $\varphi = \lambda \mathrm{Id}_V - N$, dunque
$$\det(\varphi) = \det(\lambda \mathrm{Id}_V - N) = (-1)^n \det(N - \lambda \mathrm{Id}_V) = (-1)^n p_N(\lambda),$$
dove $p_N(\lambda)$ è il polinomio caratteristico di N. Per il punto precedente, $\det(\varphi) = (-1)^n \lambda^n$, dunque φ è invertibile se e solo se $(-1)^n \lambda^n \neq 0$, ovvero se e solo se $\lambda \neq 0$.

3. Per ipotesi, N è un endomorfismo autoaggiunto, dunque per il teorema spettrale è diagonalizzabile. Ma N è anche nilpotente, dunque deve essere simile alla matrice nulla. L'unica possibilità è dunque $N = 0$.

4. Dall'identità polinomiale
$$1 - x^7 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$$
si ricava immediatamente
$$\mathrm{Id}_V - d^7 = (\mathrm{Id}_V - d)(\mathrm{Id}_V + d + d^2 + d^3 + d^4 + d^5 + d^6).$$
La derivata settima di un polinomio il cui grado è minore o uguale a 6 è certamente nulla, dunque $d^7 = 0$ e si ricava
$$\mathrm{Id}_V = (\mathrm{Id}_V - d)\left(\mathrm{Id}_V + d + d^2 + d^3 + d^4 + d^5 + d^6\right)$$
In particolare $\mathrm{Id}_V - d$ è invertibile, l'inversa è
$$(\mathrm{Id}_V - d)^{-1} = \mathrm{Id}_V + d + d^2 + d^3 + d^4 + d^5 + d^6$$
e
$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_V - d)^{-1}(x^6) &= \left(\mathrm{Id}_V + d + d^2 + d^3 + d^4 + d^5 + d^6\right)(x^6) \\ &= x^6 + 6x^5 + 30x^4 + 120x^3 + 360x^2 + 720x + 720.\end{aligned}$$

5. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si verifica facilmente che
$$\mathcal{B}_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{x}{n^2}, \frac{x^2}{n^3}, \frac{x^3}{n^4}, \frac{x^4}{n^5}, \frac{x^5}{n^6}, \frac{x^6}{n^7}\right\}$$

è una base di V, e che

$$D_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza,

$$\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{91}{n^2} = 0.$$

✓