Esercizio (compitino 8/4/2020).

1) $\varphi_f(\underline{w},\underline{v}) = \varphi(f(\underline{w}),\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$ perché $\varphi$ è simmetrico
$= \varphi(f(\underline{v}),\underline{w})$ perché $f$ è simmetrico
$= \varphi_f(\underline{v},\underline{w})$

2) $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = Id$ perché $\mathcal{B}$ è ortonormale per $\varphi$
Se $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi_f)$, $B = M_{\mathcal{B}}(f)$ allora $\forall\, \underline{v},\underline{w} \in V$
$\varphi_f(\underline{v},\underline{w}) = {}^t[\underline{v}]_{\mathcal{B}}\, A\, [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$ per definizione e
$\varphi(f(\underline{v}),\underline{w}) = {}^t(B[\underline{v}]_{\mathcal{B}})\, Id \cdot [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = {}^t[\underline{v}]_{\mathcal{B}}\, {}^tB\, [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = {}^t[\underline{v}]_{\mathcal{B}}\, B\, [\underline{w}]$

(perché $B$ è simmetrica in base ortonormale) quindi $A = B$ (visto a lezione: ${}^t\underline{x} A \underline{y} = {}^t\underline{x} B \underline{y}$ $\forall\, \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A = B$).

3) Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base ortonormale (rispetto a $\varphi$) di autovettori di $f$ (teorema spettrale). Si ha
$$\varphi_f(\underline{v}_i,\underline{v}_j) = \varphi(f(\underline{v}_i),\underline{v}_j) = \varphi(\lambda(\underline{v}_i),\underline{v}_j) = \lambda_i \varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_j) = \lambda_i \delta_{ij}$$
quindi $\mathcal{B}$ è base ortogonale per $\varphi_f$. Quindi (teo Sylvester)
$$c_+(\varphi_f) = \#\{i \mid \varphi_f(\underline{v}_i,\underline{v}_i) = \lambda_i > 0\} =$$
$$= \sum_{\lambda_i > 0} \mu_a(\lambda_i) = \sum_{\lambda_i > 0} \mu_g(\lambda_i)$$ (perché $f$ diagonalizzabile)

Similmente per $c_-(\varphi)$. Inoltre $c_0(\varphi_f) = \mu_a(0) = \mu_g(0) = \dim(\ker(f))$

4) Sia $\mathcal{B}$ base ortonormale per $\varphi$. Se $A = M_{\mathcal{B}}(\psi)$, $A$ è simmetrica e l'unico endomorfismo $f$ t.c. $M_{\mathcal{B}}(f) = A$ è simmetrico. Per il punto 2), $M_{\mathcal{B}}(\varphi_f) = M_{\mathcal{B}}(\psi)$ quindi $\varphi_f = \psi$. L'unicità di $f$ deriva da $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(\psi)$.