Compito 8/7/2014 -

Parte I

1) $\Pi = \{ {}^t\underline{a} \cdot \underline{x} = -1 \}$ con $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$r \cap \Pi$ si trova sostituendo $\underline{x} = \underline{x}_0 + t\underline{v}$

$${}^t\underline{a}(\underline{x}_0 + t\underline{v}) = {}^t\underline{a}\,\underline{x}_0 + t\,{}^t\underline{a}\,\underline{v} = 1 + 4t = -1$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow r \cap \Pi \equiv \left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) = \underline{x}_0'$$

Quindi r' ha eq. parametrica $\underline{x} = \underline{x}_0' + t\underline{v}'$

e $\underline{v}'$ deve essere ortogonale a $\underline{v}$ e appartenere alla direzione del piano: $x+2y+3z=0$.

Se $\underline{v}' \equiv (x', y', z')$ deve essere quindi:

$$\begin{cases} x'+z'=0 & (\underline{v}\cdot\underline{v}'=0) \\ x'+2y'+3z'=0 \end{cases}$$

e si trova $\underline{v}' \equiv \lambda(1,1,-1)$

e si può scegliere qualunque $\lambda \neq 0$.

---

2) Nella base canonica $e_0=1$, $e_1=x$, $e_2=x^2$ di $\mathbb{R}_2[x]$ e $e'_0=1$, $e'_1=x$, $e'_2=x^2$, $e'_3=x^3$, $e'_4=x^4$

di $\mathbb{R}_4[X]$ si ha:

$$\underline{e}_0 \to e'_0 + e'_1 + e'_2 = e''_0$$
$$\underline{e}_1 \to e'_1 + e'_2 + e'_3 = e''_1$$
$$\underline{e}_3 \to e'_2 + e'_3 + e'_4 = e''_2$$

Si noti che e''_0, e''_1, e''_2 sono lin. indip. in $\mathbb{R}_4[X]$.

Se $g \circ f = id$ deve essere

$$g(e''_0) = e_0, \quad g(e''_1) = e_1, \quad g(e''_2) = e_2$$

$$g(e''_0) = g(e'_0) + g(e'_1) + g(e'_2), \quad g(e''_1) = g(e'_1) + g(e'_2) + g(e'_3), \quad g(e''_2) = g(e'_2) + g(e'_3) + g(e'_4)$$

Ci sono ∞ soluzioni: ad es. basta mettere

$$g(e'_0) = e_0, \quad g(e'_1) = g(e'_2) = \underline{0}, \quad g(e'_3) = e_1, \quad g(e'_4) = e_2 - e_1$$

3) a) Prendendo una base di $\mathbb{R}^3$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ con $\underline{v}_1 \in V \cap W$, $v_2 \in V$, $v_3 \in W$, $f \in S$

$$\Leftrightarrow \quad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R},$$

per cui $\dim S = 5$

b) In questo caso si può prendere $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ base ortonormale: allora $M_{\mathcal{B}}(f) \in O_3$ e quindi $b = d = 0$, e $a, c, e = \pm 1$. Quindi si hanno 8 isometrie.

(Si può anche ragionare dicendo che f manda per forza $\underline{v}_1 \to \pm \underline{v}_1$, e quindi, siccome conserva gli angoli, deve avere $\underline{v}_2 \to \pm \underline{v}_2$, $\underline{v}_3 \to \pm \underline{v}_3$)

---

4) Si vede subito che $\operatorname{rk} A = 2$, quindi $i_0 = 1$,

e $\quad {}^t(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) A (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = 4 > 0$

$\quad {}^t(\underline{e}_2 + \underline{e}_3) A (\underline{e}_2 + \underline{e}_3) = -2 < 0$

e quindi $\sigma = (1, 1, 1)$, $W_+ = \operatorname{Span}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$

$W_- = \operatorname{Span}(\underline{e}_2 + \underline{e}_3)$

Inoltre $\ker A = V^\perp = \operatorname{Span}(e_1 + 2e_3)$.

---

5)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

da cui $\det \tilde{A} < 0$
(non degenere)
$\det A < 0$

quindi iperbole: $x^2 - y^2 = 1$

Centro: $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Es. 1 1). T_A lineare: verifica standard.

È isomorfismo: basta dim che $\ker T_A = \underline{0}$:

$A^{-1} M A = \underline{0} \Rightarrow$ (moltiplicando a sinistra per A e a destra per A^{-1}) $M = A \cdot \underline{0} A^{-1} = \underline{0}$

2) Se $M = (m_{ij})$, $N = (n_{ij})$ $(i,j = 1, \dots, n)$ si ha

$$\mathrm{tr}({}^tM N) = \sum_{k=1}^{n} ({}^tMN)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} ({}^tM)_{ki} (N)_{ik} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} m_{ik} n_{ik} \quad ,$$

cioè φ si può

vedere come il prodotto canonico di $\mathbb{R}^{n^2}$.
Questo dimostra sia che φ è un prodotto scalare sia che $\varphi > 0$.

[Si può alternativamente dimostrare almeno in altri 2 o 3 modi diversi]

uso ${}^tA = A^{-1}$

$$\varphi(T_A M, T_A N) = tr\left({}^t({}^tA M A)\, {}^tA N A\right) =$$

$$= tr\left({}^tA\, {}^tM A\, {}^tA N A\right) = \quad (\text{Se } A \in O_n \Rightarrow A\, {}^tA = I)$$

$$= tr\left({}^tA\, {}^tM N A\right) = tr({}^tM N)$$

$$= \varphi(M, N) \quad (\text{perché } {}^tA = A^{-1} \text{ e}$$

la traccia è invariante per similitudine).

3) Se $M = {}^tM$ e $A \in O_n$

$${}^t\left(T_A(M)\right) = {}^t\left({}^tA\, M\, A\right) = {}^tA\, {}^tM\, A = {}^tA\, M A = T_A(M)$$

similmente se $M = -{}^tM$.

4) Se T_A fosse diagonalizzabile, anche $T_A|_{\mathrm{sim}_n}$ lo sarebbe, quindi basta dim. che $T_A|_{\mathrm{sim}_n}$ non è diagonalizzabile.

Avendo già visto che T_A è ortogonale, gli unici autovalori reali possono essere 1 e -1.

Se $T_A M = M$, allora o $M = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, oppure (essendo per ipotesi M simmetrica) M ha due autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, relativi a due autovalori reali distinti λ_1, λ_2, e $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$.

Ma autovettori di $T_A M = A^{-1} M A$ sono $A^{-1}\underline{v}_1$, $A^{-1}\underline{v}_2$ (ottenuti ruotando

$\underline{v}_1, \underline{v}_2$ dello stesso angolo di A ma in verso opposto) e questi non potranno essere multipli di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ (se $A^{-1}MA = M$, $A^{-1}MA$ e M devono avere gli stessi autovettori).

Allo stesso modo si può ragionare per il caso
$$A^{-1}MA = -M$$

Quindi $\mu_g(1) = 1$, mentre -1 non è autovalore.

e $T_A|_{\mathrm{Sim}_n}$ non è diagonalizzabile.

Es 3

1) Si ha: $\dim W = \dim V_n - 1$, perché $W = \ker tr$, dove $tr : V_n \to \mathbb{R}$ è l'applicazione lineare traccia.

Quindi $\dim W^\perp = 1$ e basta trovarne un generatore. Ma ovviamente se $M \in W$

$$tr({}^t I M) = tr\, M = 0$$

cioè la matrice identità $I \in W^\perp$.

Quindi $W^\perp = \mathrm{Span}(I) = \{\lambda I,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2) Perché mi sono dimenticato di scrivere che $B \neq 0$, bastava prendere $B = 0$ e quindi $F_I(M) = M$!

(Nel punto 3 si vedrà che cosa poteva venire se si fosse richiesto $B \neq 0$).

3) Devo avere: $\varphi(F_{\underline{w}}(\underline{v}), \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, F_{\underline{w}}(\underline{u}))$ $\forall\, \underline{v}, \underline{u} \in V$. Quindi:

$$\varphi(\underline{v} - f(\underline{v})\underline{w}, \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) - f(\underline{v})\,\varphi(\underline{w}, \underline{u}) =$$

$$\varphi(\underline{v}, \underline{u} - f(\underline{u})\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) - f(\underline{u})\,\varphi(\underline{v}, \underline{w})$$

$\forall\, \underline{v}, \underline{u} \in V$. Quindi:

$$f(\underline{v})\,\varphi(\underline{w}, \underline{u}) = f(\underline{u})\,\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = f(\underline{u})\,\varphi(\underline{w}, \underline{v})$$

$\forall\, \underline{u}, \underline{v} \Rightarrow \varphi(\underline{w}, f(\underline{v})\underline{u} - f(\underline{u})\underline{v}) = 0 \quad \forall\, \underline{u}, \underline{v}$.

Decomponiamo $V = \ker f \overset{\perp}{\oplus} Z$; $\dim Z = 1$,

con $Z = \operatorname{Span}(\underline{z})$, e scriviamo

$\underline{v} = \underline{v}' + \lambda \underline{z}$, $\underline{u} = \underline{u}' + \mu \underline{z}$, $\underline{v}' \in \ker f$, $\underline{u}' \in \ker f$,

$\underline{v}' \perp \underline{z}$, $\underline{u}' \perp \underline{z}$. Allora le precedenti condizioni diventano:

$$\varphi\Big(\underline{w},\ f(\underline{v}'+\lambda\underline{z})(\underline{u}'+\mu\underline{z}) - f(\underline{u}'+\mu\underline{z})(\underline{v}'+\lambda\underline{z})\Big) = 0$$

$\forall\ \underline{v}', \underline{u}' \in \ker f$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Sviluppando si trova:

$$\varphi\Big(\underline{w},\ f(\underline{z})\big(\lambda\underline{u}' - \mu\underline{v}'\big)\Big) = 0 \qquad \forall\ \underline{u}', \underline{v}' \quad \forall \lambda, \mu.$$

Poiché $f(\underline{z}) \neq 0$ per costruzione,
e poiché al variare di $\underline{u}', \underline{v}'$, λ, μ si ottengono evidentemente tutti i vettori di $\ker f$, la condizione precedente si traduce in:

$\boxed{\underline{w} \perp \ker f\ ,}$ quindi $\underline{w} = \lambda\, \underline{z}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$

(avere preso $V = \ker f \overset{\perp}{\oplus} Z$ e non semplicemente

$V = \ker f \oplus Z$ non è essenziale e serve solo

alla fine per dire che $W = \mathrm{span}(\underline{z})$)