Compito 9/9/2014

II parte Esercizio 1.

1.) $T_\alpha\left(p(x)+q(x)\right) = p(x+1)+q(x+1)-\left(p(\alpha x)+q(\alpha x)\right)$

$= p(x+1)-p(\alpha x)+q(x+1)-q(\alpha x) = T_\alpha(p(x))+T_\alpha(q(x))$

$T_\alpha(\lambda p(x)) = \lambda p(x+1)-\lambda p(\alpha x) = \lambda\left(p(x+1)-p(\alpha x)\right)$

$= \lambda T_\alpha(p(x))$

2) Calcolando T_α della base $\mathcal{B}=\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

si trova

$$T_\alpha(x^k) = (x+1)^k - (\alpha x)^k = x^k + k\,x^{k-1} + \binom{k}{2} x^{k-2} + \dots + 1 - \alpha^k x^k$$

$$= (1-\alpha^k)\, x^k + \text{termini di grado} \leq k-1$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}(T_\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ & 1-\alpha & * & \cdots & \vdots \\ & & 1-\alpha^2 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & 0 & & & 1-\alpha^n \end{bmatrix}$$

TRIANGOLARE SUPERIORE

Se $\alpha \notin \{-1, 0, 1\}$, poiché $\alpha \in \mathbb{R}$, gli elementi diagonali sono tutti distinti. Poiché tali elementi per una matrice triangolare sono gli autovalori, segue che gli autovalori di T_α sono distinti, e quindi per un teorema T_α è diagonalizzabile.

3) Se $\alpha = 1$. T_1 ha solo l'autovalore 0, ma rango $T_1 = 3 \Rightarrow T_1$ non è diagonalizzabile.

Se $\alpha = 0$. T_0 ha autovalore 0 con $\mu_a(0) = 1$ e 1 con $\mu_a(1) = 3$. Si vede subito che

$rg(T_1 - I) = 3$, quindi T_1 non è diagonalizzabile.

Per $\alpha = -1$,

$$M_{\mathcal{B}}(T_{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 2 & 2 & 3 \\ & & 0 & 3 \\ 0 & & & 2 \end{bmatrix}$$

per cui T_{-1} ha autovalori 0 e 2 con $\mu_a(0) = 2$, $\mu_a(2) = 2$. Si trova: $\mu_g(0) = \dim \ker T_{-1} = 4 - \operatorname{rg} T_{-1} = 2$ e $\mu_g(2) = 4 - \operatorname{rg}(T_{-1} - 2I) = 1$

$$T_{-1} - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 2 & 3 \\ & & -2 & 3 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ha rango } 3$$

Quindi T_{-1} non è diagonalizzabile.

Esercizio 2 1) Se $\mathcal{B}$ è ortogonale allora avremo

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta > 0, \ \gamma < 0 .$$

2) Si trova subito $\underline{v}_0 = 3\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3$. Calcolando $\varphi(\underline{v}_0, \underline{v}_0)$ usando la matrice del punto 1 si deve avere:

$$\varphi(\underline{v}_0, \underline{v}_0) = \varphi(3\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3, 3\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3) =$$

$$= 9\alpha + 4\beta + \gamma = 0$$

da cui basta prendere $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -13$

3) I $\underline{v}_i$ sono già espressi tramite la base canonica $\mathcal{C} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ tramite la matrice:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ quindi si avrà:

$$M_e(\varphi) = [\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j)] = {}^t(P^{-1})\, M_{\mathcal{B}}(\varphi)\, (P^{-1})$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ da cui:

$$M_e(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$