Soluzione compito 11/6/2014

I parte

es 1-5

1) tutti i piani paralleli al dato si scrivono come $x+2y+3z=K$, $K\in\mathbb{R}$.
Basta sostituire le coordinate di P per trovare K, che viene -1:

$$x+2y+3z=-1$$

2) $\boxed{B}$: infatti A lin. indip. $\iff$ $\dim \mathrm{Span}(A)=K \iff$ (per Grassmann)

$$\dim(\mathrm{Span}\,A \cap W) > 0 \quad \forall\ W \text{ di } \dim > n-K.$$

3) $\dim W = n^2-n$: se si scrive $M=(x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$

e $\underline{v}=(v_1,\dots,v_n)$ allora $M\underline{v}=\underline{0}$ equivale a un sistema

di n equazioni nelle variabili x_{ij} :

$$v_1 x_{11} + v_2 x_{12} + \cdots + v_n x_{1n} = 0$$

$$v_1 x_{21} + v_2 x_{22} + \cdots + v_n x_{2n} = 0$$

$$- - - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$v_1 x_{n1} + v_2 x_{n2} + \cdots + v_n x_{nn} = 0$$

È chiaro che le equazioni sono indipendenti coinvolgendo variabili diverse (in altri termini, il rango della matrice $n \times n^2$ associata al sistema è n).

4) Un supplementare U di W sarà un sottosp. di dim n t.c. $U \cap W = \{0\}$. Costruiamo U selezionando opportunamente n vettori della base canonica di $M_n(\mathbb{R})$, che è fatta dalle matrici $E^{(ij)}$ aventi 1 al posto (i,j) e 0 altrove. Basta prendere n matrici che hanno un 1 su righe diverse, ad es:

$U = \mathrm{Span}\left(E^{(11)}, E^{(21)}, E^{(31)}, \dots, E^{(n1)}\right)$.

Una combinazione di queste matrici ha al max 1 elemento $\neq 0$ su ogni riga e quindi la moltipl. per $\underline{v}$ è $\neq \underline{0}$ (a meno che la combin. sia quella banale).

5) $\boxed{B}$ Se scriviamo $\underline{v} = \begin{pmatrix} x+iy \\ z+it \end{pmatrix}$ allora $i\underline{v} = \begin{pmatrix} -y+ix \\ -t+iz \end{pmatrix} = \bar{\underline{v}} = \begin{pmatrix} x-iy \\ z-it \end{pmatrix}$

dà:

$x = -y$, $z = -t$ come soluzione, cioè $\underline{v} = x\begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \end{pmatrix}$

Esercizio 1 (parte I)

1) Solita facile verifica (va verificato che

$T_\alpha\left(p(x)+q(x)\right) = T_\alpha(p(x)) + T_\alpha(q(x))$, $\quad T(\alpha\, p(x)) = \alpha\, T(p(x))$)

- - - - -

2) $\mathrm{Im}\, T_\alpha \subset V_2$ per definizione. Viceversa se prendiamo la base $1, x, x^2$ di V_2 si trova:

$$T_\alpha(1) = 1$$ (perché le derivate prima e seconda si annullano)

$$T_\alpha(x) = \alpha + (x-\alpha) = x$$ (perché la derivata seconda è 0)

$$T_\alpha(x^2) = \alpha^2 + 2(x-\alpha)\alpha + \frac{1}{2}(x-\alpha)^2\, 2 = \alpha^2 - 2\alpha^2 + 2x\alpha + x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = x^2$$

Questo dimostra sia che $\mathrm{Im}\, T_\alpha = V_2$ che $T_\alpha|_{V_2} = id_{V_2}$

$$T_\alpha^2(p(x)) = T_\alpha(T_\alpha\, p(x)) = T_\alpha(p(x))$$ perché $T_\alpha(p(x)) \in V_2$ e $T_\alpha|_{V_2} = id_{V_2}$

3) Poiché $\dim \mathrm{Im}\, T_\alpha = 3$, segue $\dim \ker T_\alpha = 1$. Basta quindi trovare 1 vettore $\neq \underline{0}$ in $\ker T_\alpha$. Calcoliamo

$$T_\alpha(x^3) = \alpha^3 + 3\alpha^2(x-\alpha) + \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\alpha}{\cancel{2}}(x-\alpha)^2 = \alpha^3 + 3\alpha^2 x \cancel{- 3\alpha^3} + 3\alpha x^2 - 6\alpha^2 x \cancel{+ 3\alpha^3} =$$

$$3\alpha x^2 - 3\alpha^2 x + \alpha^3$$

Se $p(x) = p_0 x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3$ sta in $\ker T_\alpha$ allora

$$T_\alpha(p(x)) = p_0(3\alpha x^2 - 3\alpha^2 x + \alpha^3) + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0$$

da cui: $p_1 = -3\alpha p_0$,

$p_2 = +3\alpha^2 p_0$

$p_3 = -\alpha^3 p_0$

cioè $p(x) = p_0(x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - \alpha^3) = p_0(x-\alpha)^3$

cioè $\ker T_\alpha = \mathrm{Span}\{(x-\alpha)^3\}$

II parte

1) $\boxed{B}$ La matrice rappresenta una rotazione di angolo ϑ attorno all'asse y.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\left(A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è diagonale} \right)$

3) $\operatorname{ord} A = 4$, $\det A = -1$, $\operatorname{tr} A = 0$, non è diagonalizz. su $\mathbb{R}$ (le soluzioni di $p(\lambda) = 0$ non sono tutte reali), è diag. su $\mathbb{C}$ (le soluzioni sono tutte distinte: sono le 4 radici 4^e dell'unità).

4) $\boxed{C}$ è stato dimostrato a lezione.

5) $\boxed{A}$ gli autovalori di A^m sono le potenze m-esime degli autovalori di A, quindi A ha solo l'autovalore 0.

Esercizio 2 (parte II)

1. ⇒) $\mu_g(1) \geq n-1$ per ipotesi. Se $\mu_g(1) = n$ allora $f = id$ ed ogni supplementare di W è invariante.

Se $\mu_g(1) = n-1 = \mu_a(1)$, esiste un altro autovalore $\lambda \neq 1$, con $\mu_g(\lambda) = 1$, e allora V_λ è un supplementare invariante di $W = V_1$.

⇐) Se U è un suppl. invariante di W, allora $\dim U = 1$; se $U = \mathrm{Span}(\underline{u})$ allora $\underline{u}$ è autovettore (perché U è invariante di dim 1) e una base di autovettori di V è data aggiungendo $\underline{u}$ a una base di W.

2) Siccome $T_\alpha|_{V_2} = id_{V_2}$ e $\dim \ker T_\alpha = 1$, e $\ker T_\alpha$ è invariante ovviamente, si applica il punto 1).

3) Una base di autovettori per T_α è data da una base di V_2

unita a una base di $\ker T_\alpha = \text{Span}\,(x-\alpha)^3$.

È chiaro che se $\alpha \neq \beta$ $(x-\alpha)^3$ e $(x-\beta)^3$ sono lin. indipendenti, quindi T_α e T_β non possono avere una base comune di autovettori.

III parte

1) $\sigma(A) = (2, 1, 0)$

2) $\boxed{B}$ $i_+(\varphi) = n - (i_-(\varphi) + i_0(\varphi)) = n - \max\{\dim W \mid \varphi|_W \leq 0\}$

3)

- ${}^tA = {}^t(D\,{}^tD) = D\,{}^tD = A$; ${}^tB = {}^t({}^tD\,D) = {}^tD\,D = B$

- ${}^t\underline{x}\,A\,\underline{x} = {}^t\underline{x}\,D\,{}^tD\,\underline{x} = {}^t({}^tD\,\underline{x})({}^tD\,\underline{x}) \geq 0$ (perché ${}^t\underline{y}\,\underline{y} \geq 0\ \forall \underline{y}$)

  ${}^t\underline{x}\,B\,\underline{x} = {}^t\underline{x}\,{}^tD\,D\,\underline{x} = {}^t(D\underline{x})\,D\underline{x} \geq 0$

- $\operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} D = 2$

- Si ha $\operatorname{rk} B = \dim \operatorname{Im} {}^tD\,D = \dim \operatorname{Im} {}^tD|_{\operatorname{Im} D}$ $(\operatorname{Im} D = \mathbb{R}^2$

perché $\operatorname{rk} D = 2$)

$= \dim \operatorname{Im} {}^tD = \operatorname{rk} {}^tD = \operatorname{rk} D = 2$. Quindi B è non singolare. Poiché $B \geq 0$ segue $B > 0$

---

4) (facoltativo). I centri sono dati delle soluzioni di $A\underline{t} = -\underline{b}$

In questo caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ quindi si ha 1 centro dato da

$\underline{t} = (-1, 0)$

Gli invarianti sono $|s(A)| = 0$, $|s(\hat{A})| = 1$, $\operatorname{rk} A = 3$, $A_{33} < 0$

Quindi la conica è un'iperbole; la forma canonica affine è

$$x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

Esercizio 3. 1) $\underline{w} \in \operatorname{Im} T \iff \exists \underline{v} \in V$ t.c. $T\underline{v} = \underline{w}$.

Se $\underline{w} \in \operatorname{Im} T$, $\underline{u} \in \ker T$ e T è simmetrico si ha:

$$\varphi(\underline{w}, \underline{u}) = \varphi(T\underline{v}, \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, T\underline{u}) = 0 \quad \text{perché } \underline{u} \in \ker T$$

2) Sia $W = \mathrm{Im}\, T$. Allora $T|_W = \mathrm{id}|_W$ e $T^2 = T$.

Da $T|_W = \mathrm{id}|_W$ segue che $(\ker T) \cap W = \{\underline{0}\}$

e quindi $\ker T$ e $\mathrm{Im}\, T$ sono in somma diretta.

Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$, e scriviamo $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$, $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$

con $\underline{v}_1, \underline{w}_1 \in \ker T$, $\underline{v}_2, \underline{w}_2 \in \mathrm{Im}\, T$.

Allora

$$\varphi(T(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2), \underline{w}_1 + \underline{w}_2) = \varphi(\underbrace{T(\underline{v}_1)}_{\substack{= \underline{0} \\ \text{perché } \underline{v}_1 \in \ker T}} + \underbrace{T(\underline{v}_2)}_{\substack{= \underline{v}_2 \text{ perché} \\ T|_W = \mathrm{id}}}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) =$$

$$= \varphi(\underline{v}_2, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) = \overbrace{\varphi(\underline{v}_2, \underline{w}_1)}^{\substack{0 \text{ perché per ip. } \ker T \perp \mathrm{Im}\, T \\ \parallel}} + \varphi(\underline{v}_2, \underline{w}_2) =$$

$$= \varphi(\underline{v}_2, \underline{w}_2)$$

È chiaro che se si calcola $\varphi(\underline{v}_1+\underline{v}_2,\ T(\underline{w}_1+\underline{w}_2))$ si trova le stesse cose.

3) Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Im} T_\alpha$ e $\ker T_\alpha = \operatorname{Span}(x-\alpha)^3$ e che T_α è una proiezione su V_2.

Per il punto precedente basta imporre che $(x-\alpha)^3 \perp V_2$

$\Leftrightarrow (x-\alpha)^3 \perp 1, x, x^2.$

Si vede subito che questo dà $\alpha = 0$.