Soluzione compitino 16/12/2014 (con commenti)

I parte 1). Tutti i piani che contengono r stanno nel fascio di piani determinato dalle 2 equazioni, cioè hanno equazione del tipo

$$\alpha(2x-3y-z-1)+\beta(x+2y+z-2)=0 \quad , \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

cioè:

$$(2\alpha+\beta)x+(2\beta-3\alpha)y+(\beta-\alpha)z-\alpha-2\beta=0$$

Un piano è parallelo all'asse y $\Leftrightarrow$ si annulla il coefficiente di y nella sua equazione cartesiana. Quindi deve essere $3\alpha=2\beta$ e l'equazione (che è determinata a meno di un fattore) è: $\boxed{7x+z=8}$

2) Intanto calcoliamo le coordinate di P_i :

$P_1 \equiv (a,0,0)$; $P_2 \equiv (0,b,0)$; $P_3 (0,0,c)$

Il baricentro ha come coordinate <u>le media</u> delle coordinate dei dati punti $\left[(x_j)_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_j)_{P_i} \right.$, $j = 1,2,3$; e si hanno i punti $\left. P_1, \dots, P_n \right]$

Quindi:

a) $B \equiv \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3} \right)$

b) $G \equiv \left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4} \right)$

c) Si ricorda che $\text{Area}(P_1 P_2 P_1) = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_1 P_3} \|$. Si ha

$$\overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_1 P_3} \equiv \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = (bc, ac, ab)$$

e

Quindi:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2} = \frac{abc}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

d) Si ricorda che $\text{Vol}(GP_1P_2P_3) = \frac{1}{6}\langle \overrightarrow{GP_1}, \overrightarrow{GP_2} \times \overrightarrow{GP_3} \rangle$ (prodotto misto) per cui essendo:

$\overrightarrow{GP_1}\left(\frac{3}{4}a, -\frac{b}{4}, -\frac{c}{4}\right)$ $\overrightarrow{GP_2}\left(-\frac{a}{4}, \frac{3}{4}b, -\frac{c}{4}\right)$ $\overrightarrow{GP_3}\left(-\frac{a}{4}, -\frac{b}{4}, \frac{3}{4}c\right)$

si ha:

$$\text{Volume} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \frac{3}{4}a & -\frac{b}{4} & -\frac{c}{4} \\ -\frac{a}{4} & \frac{3}{4}b & -\frac{c}{4} \\ -\frac{a}{4} & -\frac{b}{4} & \frac{3}{4}c \end{vmatrix} \overset{\text{conti}}{=} \dots = \frac{1}{24}abc$$

[Intuitivamente: il volume è $\frac{1}{4}$ del volume totale del tetraedro; cioè G divide il tetraedro in 4 tetraedri con lo stesso volume]

3) Una f lineare di cui si conoscono le immagini dei vettori di base è univocamente determinata e in particolare se ne può calcolare il rango.

$\underline{r=0}$ l'unica trasformazione lineare di rango 0 è la applicazione nulla, che manda tutto in $\underline{0}$. Qui sappiamo che $f(\underline{v}_i)$ deve essere uno dei $\underline{v}_j$, quindi non può mandare tutto in $\underline{0}$.

Quindi n° endomorfismi $= 0$

$\underline{r=1}$ Deve essere $\dim \operatorname{Im} f = 1$, quindi $\operatorname{Im} f$ contiene al max 1 vettore indipendente; con le ipotesi scelte, deve essere che $f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2) = f(\underline{v}_3) = \underline{v}_j$, per un fissato $j = 1, 2, 3$.

Quindi n° endomorfismi $= 3$

$\underline{n=3}$: $\dim \mathrm{Im} f = 3 \Leftrightarrow f(\text{base})$ è base, quindi $f(\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\})$
$= \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Le f con tale proprietà sono tante quante le permutazioni dei 3 vettori, quindi $3! = 6$

$\underline{n=2}$ In totale ci sono $3^3 = 27$ trasformazioni lineari t.c.

$f(\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}) \subset \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Il rango di f può essere solo $0, 1, 2, 3$. Quindi per differenza:

$$\text{n° endom. di rango } 2 = 27 - 9 = 18$$

4) $(a+ib)^2 = a - ib \iff$

$a^2 - b^2 + 2iab = a - ib \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$

Se $b = 0$: $a^2 = a \iff a = 0, 1$

$z = 0, \quad z = 1$

Se $b \neq 0$ $2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ e inoltre

$a^2 - a = b^2 \iff \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = b^2 = \frac{3}{4}$ $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

soluzioni: $z = 0$, $z = 1$, $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

II Parte.

Es. 1. 1) Per la formula delle dimensioni gli α cercati sono quelli per cui $\operatorname{rg} M_\alpha = 2$. Riducendo la matrice:

$$M_\alpha \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha^2-\alpha-1 & \alpha^2-\alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_\alpha$$

quindi: $\operatorname{rg} M_\alpha = 2 \iff \alpha^2-1=0 \iff \alpha = \pm 1$

2) $\alpha = 1$:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ quindi $\ker M_1 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 2\beta \\ x_2 = -\beta \\ x_3 = -\beta \\ x_4 = -\alpha \end{cases}$$

ed equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$\operatorname{Im} M_1$ è lo Span delle I e II colonne di M_1

$$\operatorname{Im} M_1 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

da cui

eq. parametriche:
$$\begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases}$$

ed eq. cartesiane

$$\begin{cases} x_4 = x_1 + x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Mettendo insieme le basi di $\ker M_1$ e $\operatorname{Im} M_1$, si ottiene la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ le cui colonne generano $\ker M_1 + \operatorname{Im} M_1$

Affinché $\ker M_1$ e $\operatorname{Im} M_1$ siano in somma diretta occorre e basta che $\ker M_1 + \operatorname{Im} M_1 = \mathbb{R}^4$, e quindi che $\operatorname{rg} A = 4$ (per Grassmann)

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = 4$ quindi $\ker M_1$ e $\operatorname{Im} M_1$ sono in somma diretta

Si poteva anche usare le equazioni cartesiane di $\ker M_1$ e $\operatorname{Im} M_1$ cercando le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = x_1 + x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

che sono i punti dell'intersezione.
Si trova che l'unica soluzione è

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

e quindi sono in somma diretta.

$\underline{\alpha = -1}$

$$S_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ quindi

$\ker M_{-1} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ e quindi eq. parametriche

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2\alpha + \beta \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \alpha \end{cases}$$, eq. cartesiane: $$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

$$\operatorname{Im} M_{-1} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

e quindi

eq. parametriche

$$\begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \alpha - \beta \end{cases}$$

eq. cartesiane

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

Utilizziamo uno dei due metodi sopra per vedere se $\ker M_{-1}$ e $\operatorname{Im} M_{-1}$ sono in somma diretta.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 4, e quindi sono in somma diretta.

Es 3

1) Basta dimostrare che

$$(*)\quad \begin{cases} F_A\big(p(x)+q(x)\big) = F_A\big(p(x)\big) + F_A\big(q(x)\big) \\ F_A\big(\lambda\, p(x)\big) = \lambda\, F_A\big(p(x)\big) \end{cases}$$

e questo è molto semplice. Ad es. la prima:

Se $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, si ha:

$$p(x)+q(x) = a_0 + b_0 + (a_1+b_1)\,x + (a_2+b_2)\,x^2$$

e quindi

$$F_A\big(p(x)+q(x)\big) = (a_0+b_0)\,I + (a_1+b_1)\,A + (a_2+b_2)\,A^2$$

$F_A(p(x)) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2$

$F_A(q(x)) = b_0 I + b_1 A + b_2 A^2$

La somma di queste due ultime è chiaramente uguale alla $F_A(p(x) + q(x))$.

La seconda di (*) è simile.

2) Base canonica di V: $\{1, x, x^2\}$

base canonica di W:

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_A(1) = I$ (perché: $1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$)

$= E_{11} + E_{22}$

$F_A(x) = A$ (perché $x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$)

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{21}$

$F_A(x^2) = A^2$ (perché $x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$)

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = I = E_{11} + E_{22}$

Quindi la matrice cercata è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Facoltativo. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice associata a F_A rispetto alle basi canoniche è:

(tenendo conto che $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2+bc \\ 0 & b & ab+bd \\ 0 & c & ac+cd \\ 1 & d & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2+bc \\ 0 & b & b(a+d) \\ 0 & c & c(a+d) \\ 1 & d & bc+d^2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 3^a \text{ colonna} - \\ (a+d) \, 2^a \text{ colonna} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & bc-ad \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & d & bc-ad \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & d & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango ≤ 2.