Complementi lezione del 14/5/2015

<u>Teorema 1</u> Per ogni matrice complessa $A \in M_n(\mathbb{C})$ esiste una matrice unitaria $U \in \mathcal{U}_n$ t.c. $U^* A U = T$ triangolare (superiore).
Se A è reale ($A \in M_n(\mathbb{R})$) ed A ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$, allora $\exists$ matrice ortogonale $O \in \mathcal{O}_n$ t.c. ${}^t O A O = T$ triangolare

<u>dim.</u> [vedi ultimo teorema della lezione del 27/2/2014]. Sia $\underline{v}_1 \in \mathbb{C}^n$ autovettore di A con $\|\underline{v}_1\| = 1$. Completiamo a base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ ortonormale rispetto al prodotto hermitiano canonico. Se $Q_1 = [\underline{v}_1 | \cdots | \underline{v}_n]$ ha come colonne i $\underline{v}_j$ allora $Q_1 \in \mathcal{U}_n$ (teo. visto prima) e per costruzione

$$Q_1^* A Q_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & B \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right] \quad (\text{dove } A\underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1)$$

Per induzione $\exists\ Q_2 \in U_{n-1}$ t.c. $Q_2^* C Q_2 = T'$ triangolare.

Sia $Q_3 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & Q_2 \\ 0 & \end{array}\right]$. Allora $Q_3 \in U_n$ (facile esercizio) e

$$Q_3^* \left(Q_1^* A Q_1\right) Q_3 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & Q_2^* C Q_2 \\ 0 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & T' \\ 0 & \end{array}\right] = T \text{ triangolare.}$$

Si sceglie $U = Q_1 Q_3$. Il prodotto di matrici unitarie è unitario, quindi si conclude.

Nel caso reale, si può per ipotesi scegliere $\underline{v}_1 \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{v}_1\| = 1$, e completare a base ortonormale rispetto al prodotto canonico in $\mathbb{R}^n$. Poi si procede nello stesso modo: per potere fare l'induzione qui occorre anche che C abbia tutti autovalori reali, ma se $B = Q_1^* A Q_1$ allora $p_B(\lambda) = p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\, p_C(\lambda)$ quindi gli autovalori di C sono autovalori anche di A.

Def. $A \in M_n(\mathbb{C})$ si dice NORMALE se $AA^* = A^*A$

__esempi__: tutte le matrici diagonali sono normali. Una matrice hermitiana $(A = A^*)$ è normale, così come una matrice simmetrica reale (caso particolare di matrice hermitiana). Similmente, una matrice anti-hermitiana $(A = -A^*)$ o antisimmetrica reale.

__Prop.__ Una matrice __triangolare__ T che sia normale è necessaria-mente __diagonale__.

__dim__ Sia

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{bmatrix} \quad ; \quad T^* = \begin{bmatrix} \bar{t}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \bar{t}_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \bar{t}_{1n} & \bar{t}_{2n} & \cdots & \bar{t}_{nn} \end{bmatrix}$$

Allora sia $T^* T = T T^*$.

Uguagliando l'elemento di posto $(1,1)$ si ottiene:

$$\bar{t}_{11} \, t_{11} = t_{11} \, \bar{t}_{11} + t_{12} \bar{t}_{12} + \qquad + t_{1n} \, \bar{t}_{1n}$$ cioè:

$$|t_{11}|^2 = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2$$ da cui segue:

$$t_{12} = \dots = t_{1n} = 0$$

Proseguendo uguagliando successivamente gli elementi di posto $(2,2), \dots (n,n)$ si conclude. ▬

Teorema 2 A normale $\Rightarrow \exists\, U \in \mathbb{U}_n$ t.c. $U^*AU = D$ diagonale

Se A è reale, normale (cioè ${}^tAA = A\,{}^tA$) e ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$ allora $\exists\, O \in \mathbb{O}_n$ t.c. ${}^tOAO = D$ diagonale.

<u>dim</u>. Per il teo 1 $\exists\, U$ con $U^*AU = T$ triangolare superiore

Anche T risulta normale:

essendo $T^* = (U^*AU)^* = U^*A^*(U^*)^* = U^*A^*U$, si ha:

$$TT^* = U^*AUU^*A^*U = U^*AA^*U = U^*A^*AU$$
$$T^*T = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU$$

quindi $\quad TT^* = T^*T$

Per la prop. precedente, T è diagonale.

Nel caso A reale si usa il teorema 1, caso reale, e si procede nello stesso modo.

Corollario 1) A normale $\Rightarrow$ A diagonalizzabile tramite una matrice unitaria $\Rightarrow$ A normale.

2) Se A è reale, normale e con tutti autovalori reali $\Rightarrow$ A diagonalizzabile tramite matrice ortogonale $\Rightarrow$ A simmetrica

dim 1) La prima implicazione deriva subito dal teorema perché $U^* = U^{-1}$.

La seconda :

$$U^* A U = D \Rightarrow A = U D U^* \Rightarrow A^* = U D^* U^* \Rightarrow$$

$$A A^* = U D U^* U D^* U^* = U D D^* U^* = U D^* D U^*$$

(matrici diagonali commutano) $= U D^* U^* U D U^* = A^* A$

2) prima implicazione deriva dal teorema perchè ${}^tO = O^{-1}$. La seconda implicazione :

$${}^tO A O = D \Rightarrow A = O D {}^tO \Rightarrow {}^tA = O\, {}^tD\, {}^tO = O D {}^tO = A .$$

<u>oss</u>. È importante notare che due matrici reali simmetriche A, B t.c. $B = {}^tO A O$ per qualche matrice ortogonale O sono <u>sia simili</u> (perché ${}^tO = O^{-1}$), e quindi in particolare hanno gli stessi autovalori, <u>sia congruenti</u> e quindi in particolare hanno la stessa segnatura (per segnatura di A si intende la segnatura del prodotto ${}^t\underline{x} A \underline{y}$ associato).

Lo stesso dicasi per due matrici complesse hermitiane A, B, tali che $B = U^* A U$

Corollario. Se A è hermitiana (in particolare, A simmetrica reale) $\Rightarrow$ A ha tutti gli autovalori reali.

dim $\exists\, U \in \mathcal{U}_n$ con $U^* A U = D$. Prendendo l'aggiunto di entrambi i membri si trova $(U^* A U)^* = D^*$. Ma

$$(U^* A U)^* = U^* A^* U = U^* A U$$ perché A hermitiana.

Quindi $D^* = D$, cioè D è reale. Essendo anche D simile ad A, si conclude.

<u>Corollario</u> (Teorema spettrale) V, φ spazio euclideo, $f: V \to V$ endomorfismo simmetrico. Allora $\exists$ base ortonormale di autovettori

<u>dim</u> Sia $\mathcal{B}$ base ortonormale. Allora come visto $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica, quindi per il coroll. precedente A ha tutti gli autovalori reali; quindi per il Teo 2 $\exists\ O \in O_n$ t.c. ${}^tO A O = D$ diagonale. Quindi i vettori $\underline{v}_j$ t.c.

$[\underline{v}_j]_{\mathcal{B}} = O^j$ (j-sima colonna di O) sono una base ortonormale $\left(\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = {}^t[\underline{v}_i]_{\mathcal{B}}[\underline{v}_j]_{\mathcal{B}} = \delta_{ij}\right)$

<u>Corollario</u> Se $\lambda \neq \mu$ sono autovalori distinti $\Rightarrow V_\lambda \perp V_\mu$.

dim. Si ha $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$, con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tutti gli autovalori distinti di f, perché f è diagonalizzabile. Qualunque base di autovettori di V si ottiene unendo basi di V_{λ_1}, V_{λ_2}, ecc.
Dall'ipotesi che $\exists$ base $\mathcal{B}$ t.c. i vettori di $\mathcal{B}$ che sono in V_λ sono ortogonali ai vettori di $\mathcal{B}$ che sono in V_μ, segue subito che $V_\lambda \perp V_\mu$ (sviluppare due generici vettori di V_λ e V_μ tramite le rispettive basi).

(per altra dimostrazione si vedano le note dello scorso anno).

Esercizi.

1) Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ t.c. $AB = BA$ si possono triangolare simultaneamente

2) Dimostrare che il gruppo O_n dipende da $\frac{n(n-1)}{2}$ parametri reali, e che il gruppo U_n dipende da n^2 parametri reali

3) Trovare un'inclusione di U_n in O_{2n}.

Dato $f \in \mathcal{L}(V)$, sia ${}^t f \in \mathcal{L}(V^*)$ dato da ${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$.

Se $W \subset V$, sia $\mathrm{Ann}(W) = \{ \varphi \in V^* \mid \varphi(W) = 0 \} = \{ \varphi \in V^* \mid W \subset \ker \varphi \}$.

<u>Prop</u> (i) $U \subset W \Rightarrow \mathrm{Ann}\, U \supset \mathrm{Ann}\, W$

(ii) $\mathrm{Ann}(U+W) = \mathrm{Ann}\, U \cap \mathrm{Ann}\, W$

(iii) $\mathrm{Ann}(U \cap W) = \mathrm{Ann}\, U + \mathrm{Ann}\, W$

(iv) $\mathrm{Ann}(\ker f) = \mathrm{Im}\, {}^t f$

(v) $\mathrm{Ann}(\mathrm{Im}\, {}^t f) = \ker f$

Sia φ un prodotto scalare non degenere. Allora

<u>Prop</u> (i) $s_\varphi : V \to V^* : \underline{v} \mapsto \langle \underline{v}, \cdot \rangle$ è un isomorfismo.

(ii) $W \subset V$: $W^\perp \xrightarrow[\simeq]{s_\varphi} \mathrm{Ann}\, W$

(iii) $s_\varphi(f(\underline{v}))(\underline{w}) = s_\varphi(\underline{v})(f(\underline{w}))$ cioè:

$$\langle {}^{t}f(\underline{w}), \underline{v} \rangle \equiv \langle \underline{w}, f(\underline{v}) \rangle$$