Vettori geometrici I

Coordinate. Dati due vettori piani $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ non allineati, ogni vettore piano $\underline{v}$ si sviluppa (secondo la regola del parallelogramma) in modo unico come:

$$\underline{v} = x\,\underline{v}_1 + y\,\underline{v}_2 \qquad , \; x, y \in \mathbb{R}$$

La coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dà le coordinate di $\underline{v}$ nel riferimento $\underline{v}_1, \underline{v}_2$.

Fissato un punto origine O nel piano, si ha una corrispondenza biunivoca tra i punti P del piano e i vettori, facendo corrispondere a P il vettore $\overrightarrow{OP}$ individuato dal segmento OP.

Diciamo che P ha coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se $\overrightarrow{OP}$ ha coordinate x, y (nel riferimento $\underline{v}_1, \underline{v}_2$: $\overrightarrow{OP} = x\,\underline{v}_1 + y\,\underline{v}_2$).

Per i vettori nello spazio si ha analogamente: fissati 3 vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ non complanari, ogni vettore $\underline{v}$ si sviluppa in modo unico come:

$$\underline{v} = x\,\underline{v}_1 + y\,\underline{v}_2 + z\,\underline{v}_3 \quad , \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

e la terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dà le coordinate di $\underline{v}$ nel riferimento $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$.

Fissato un punto origine O nello spazio, si ha corrispondenza biunivoca tra i punti e i vettori: al punto P si fa corrispondere il vettore $\overrightarrow{OP}$ e si assegnano a P le coordinate (nel riferimento $O, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$) (x, y, z) del vettore $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OP} = x\,\underline{v}_1 + y\,\underline{v}_2 + z\,\underline{v}_3 \quad , \quad P \equiv (x, y, z).$$

Se si prendendono 3 versori a 2 a 2 ortogonali come $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ si ritrovano le solite coordinate cartesiane ortogonali.

<u>Osserviamo</u>: se $\underline{v}$ ha coordinate (x, y, z) e $\underline{w}$ ha coordinate (x', y', z') allora $\underline{v} + \underline{w}$ (con la regola del parallelogramma) ha coordinate $(x+x', y+y', z+z')$

[infatti: $\underline{v} = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3$; $\underline{w} = x'\underline{v}_1 + y'\underline{v}_2 + z'\underline{v}_3 \Rightarrow$

$\underline{v} + \underline{w} = (x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3) + (x'\underline{v}_1 + y'\underline{v}_2 + z'\underline{v}_3) =$ [usando le proprietà della somma e del prodotto esterno] $=$

$= (x+x')\underline{v}_1 + (y+y')\underline{v}_2 + (z+z')\underline{v}_3$]

e $\alpha \underline{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ha coordinate $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

(esercizio)

Prodotto scalare tra vettori. Ricordiamo che il prodotto scalare tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$ è definito come:

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cos(\widehat{\underline{v}, \underline{w}})$$

dove si è indicato con $\|\underline{v}\|$ la lunghezza del vettore $\underline{v}$.

La quantità $\|\underline{w}\| \cos(\widehat{\underline{v}, \underline{w}})$ si indica anche con $pr_{\underline{v}}(\underline{w})$ ed indica la lunghezza (con segno) della proiezione ortogonale di $\underline{w}$ sulla retta di $\underline{v}$. Allo stesso modo si indicherà $\|\underline{v}\| \cos(\widehat{\underline{v}, \underline{w}}) = pr_{\underline{w}}(\underline{v})$. Quindi si può scrivere:

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \|\underline{v}\| \, pr_{\underline{v}}(\underline{w}) = \|\underline{w}\| \, pr_{\underline{w}}(\underline{v})$$

Il segno della proiezione è positivo se l'angolo tra i vettori è acuto, negativo se l'angolo è ottuso.

Proprietà:

1) $\langle \alpha \underline{v}, \underline{w} \rangle = \alpha \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \alpha \underline{w} \rangle \qquad , \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\langle \underline{v}, \underline{u} + \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ e

$\langle \underline{u} + \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

3) $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle$ (simmetria)

dim 1: esercizio

dim 2: usando la definizione di somma vettoriale, si dimostri

$$M_{\underline{v}}(\underline{u} + \underline{w}) = M_{\underline{v}}(\underline{u}) + M_{\underline{v}}(\underline{w})$$

dim 3: esercizio

Scrittura in coordinate cartesiane ortogonali

$$\underline{v} \equiv (x, y, z) \quad , \quad \underline{w} \equiv (x', y', z') \Rightarrow \quad \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = x x' + y y' + z z'$$

Infatti se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono 3 versori a 2 a 2 ortogonali, e

$\underline{v} = x \underline{v}_1 + y \underline{v}_2 + z \underline{v}_3$; $\underline{w} = x' \underline{v}_1 + y' \underline{v}_2 + z' \underline{v}_3$ allora, usando le proprietà 1) e 2) sopra si trova:

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle x \underline{v}_1 + y \underline{v}_2 + z \underline{v}_3 , x' \underline{v}_1 + y' \underline{v}_2 + z' \underline{v}_3 \rangle = x x' \langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle + x y' \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$$
$$+ x z' \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle + y x' \langle \underline{v}_2, \underline{v}_1 \rangle + y y' \langle \underline{v}_2, \underline{v}_2 \rangle + y z' \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle +$$
$$z x' \langle \underline{v}_3, \underline{v}_1 \rangle + z y' \langle \underline{v}_3, \underline{v}_2 \rangle + z z' \langle \underline{v}_3, \underline{v}_3 \rangle =$$

[tenendo conto che $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$] $= x x' + y y' + z z'$

Equazioni parametriche e cartesiane di rette e piani.

Eq. retta nel piano

1) $ax + by = c$, eq. cartesiana

2) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\,\underline{v}$, eq. parametrica

La 2) in coordinate si scrive: $\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \end{cases}$ dove

$P_0 \equiv (x_0, y_0)$

$\underline{v} \equiv (v_1, v_2)$

Eq. piano nello spazio:

$$ax + by + cz = d \qquad \text{eq. cartesiana}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\underline{v} + s\underline{w} \quad , \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + tv_1 + sw_1 \\ y = y_0 + tv_2 + sw_2 \\ z = z_0 + tv_3 + sw_3 \end{array} \right\} \quad \text{eq. parametrica}$$

[$\underline{v}$, $\underline{w}$ non allineati]

Interpretazione geometrica:

$ax + by + cz = d \iff \langle \underline{n}, \underline{v} \rangle = d$ dove

$\underline{n} \equiv (a, b, c)$, $\underline{v} \equiv (x, y, z)$; quindi

se $d = 0$: piano per l'origine ortogonale a $\underline{n}$;
in generale è il piano ortogonale a $\underline{n}$ dei vettori $\underline{v}$ t.c.

$$pr_{\underline{n}}(\underline{v}) = d / \|\underline{n}\|$$

Eq. retta nello spazio

cartesiana: $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ (intersezione di 2 piani) con (a, b, c) non parallelo ad (a', b', c').

parametrica: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\underline{v}$ $\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \\ z = z_0 + t v_3 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

__Prodotto vettore__: $\underline{v} \times \underline{w}$ è un vettore t.c.

- lunghezza $\|\underline{v} \times \underline{w}\| = \|\underline{v}\| \, \|\underline{w}\| \operatorname{sen}(\widehat{\underline{v}, \underline{w}})$ [$= \underline{0} \iff \underline{v}, \underline{w}$ sono multipli]

- direzione (se $\underline{v} \times \underline{w} \neq \underline{0}$) data dalla normale al piano determinato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$

- verso: regola mano destra.

__nota__ $\|\underline{v} \times \underline{w}\| =$ area parallelogramma determinato da $\underline{v}, \underline{w}$.

Si potrebbero far vedere le proprietà (non lo facciamo)

1) $(\alpha \underline{v}) \times \underline{w} = \alpha(\underline{v} \times \underline{w}) = \underline{v} \times (\alpha \underline{w})$, $\alpha \in \mathbb{R}$

2) $\underline{v} \times (\underline{u} + \underline{w}) = \underline{v} \times \underline{u} + \underline{v} \times \underline{w}$

$(\underline{u} + \underline{v}) \times \underline{w} = \underline{u} \times \underline{w} + \underline{v} \times \underline{w}$

3) $\underline{v} \times \underline{w} = - \underline{w} \times \underline{v}$ (antisimmetria)

Scrittura in coordinate cartesiane ortogonali

Come si è fatto per il prodotto scalare, se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono 3 versori a 2 a 2 ortogonali, basterà conoscere i loro prodotti vettore:

$\underline{v}_i \times \underline{v}_i = \underline{0}$, $i = 1, 2, 3$.

$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \underline{v}_3 = - \underline{v}_2 \times \underline{v}_1$; $\underline{v}_3 \times \underline{v}_1 = \underline{v}_2 = - \underline{v}_1 \times \underline{v}_3$

$\underline{v}_2 \times \underline{v}_3 = \underline{v}_1 = - \underline{v}_3 \times \underline{v}_2$

e si ricava subito; se $\underline{v} \equiv (x, y, z)$; $\underline{w} \equiv (x', y', z')$:

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \underline{v}_1 - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \underline{v}_2 + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \underline{v}_3$$

dove $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (per definizione)

Data una tabella di numeri 3×3 definiamo

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

allora formalmente $\underline{v} \times \underline{w}$ si trova:

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

<u>Prodotto misto</u> Dati $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vettori possiamo calcolare:

$\langle \underline{u}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle$ che si dirà il <u>prodotto misto</u> di 3 vettori.

Si ha:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle = \|\underline{u}\| \, \|\underline{v} \times \underline{w}\| \cos(\widehat{\underline{u}, \underline{v} \times \underline{w}})$$

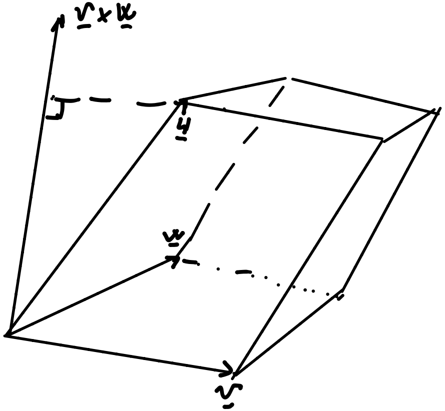
e poiché: $\|\underline{v} \times \underline{w}\| =$ area parallelogramma individuato da $\underline{v}, \underline{w}$;

$\|\underline{u}\| \cos(\widehat{\underline{u}, \underline{v}\times\underline{w}}) = pr_{\underline{v}\times\underline{w}}(\underline{u})$ è la proiezione ortogonale di $\underline{u}$ nella direzione normale al piano di $\underline{v}, \underline{w}$, quindi è l'altezza del parallelepipedo individuato dai 3 vettori (fig.)

allora:

$$\langle \underline{u}, \underline{v}\times\underline{w}\rangle = \pm \text{ volume parallelepipedo individuato da } \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}.$$

Il segno + si ha se i 3 vettori rispondono alla regola della mano destra; altrimenti si ha il segno −.



Applicazione 3 vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ sono complanari

$$\Longleftrightarrow \quad \langle \underline{u}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle = 0$$

Scrittura in coordinate cartesiane ortogonali.

Applicando quanto visto sopra, se $\underline{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} \equiv (w_1, w_2, w_3)$ allora:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

<u>esercizio</u>: dedurre come cambia il prodotto misto permutando fra loro i vettori.

<u>Applicazione</u>: piano per 3 punti P_1, P_2, P_3 non allineati:

se $P_1 \equiv (a_1, a_2, a_3)$; $P_2 \equiv (b_1, b_2, b_3)$; $P_3 \equiv (c_1, c_2, c_3)$ allora

$P \in$ piano $\iff$ $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ sono complanari $\iff$

(per quanto sopra visto) dette (x, y, z) le coord. di P:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$