$\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo vettoriale

$D \subset \mathbb{R}^3$

$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\vec{i} + F_2(x,y,z)\,\vec{j} + F_3(x,y,z)\,\vec{k}$

$\equiv (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$

$\vec{F}$ è conservativo se $\exists\ \varphi : D \to \mathbb{R}$ t.c.

$D\varphi = \vec{F}$

<u>NOTA</u>: dipende dal <u>dominio</u>. Vedremo esempi di $\vec{F}$ non conservativo in D, ma conservativo in qualche sottodominio di D.

<u>es.</u> $\vec{F}(\vec{r}) = \psi(\vec{r})\ \vec{r}$ $\qquad \vec{r} \equiv (x,y,z)$

se $\vec{F}$ ha simmetria sferica ($\|\vec{F}\|$ vale la stessa quantità per punti che hanno la stessa distanza dall'origine).

$\vec{F}(\vec{r}) = \psi(r)\,\vec{r}$ $\qquad$ $\|\vec{F}(\vec{r})\| = |\psi(r)|\, r$

è conservativo? Cerchiamo una φ a simmetria sferica: $\varphi(x,y,z)$ deve dipendere solo da r

$$\varphi(x,y,z) = \lambda\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \lambda(r)$$

Deve essere:

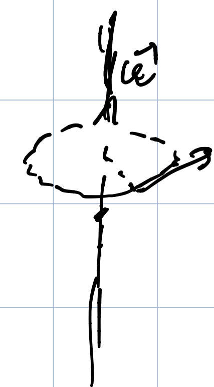
$$\nabla\varphi = \vec{F} \qquad \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda'(r)\frac{x}{r},\ \lambda'(r)\frac{y}{r},\ \lambda'(r)\frac{z}{r}\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\begin{cases} \lambda'(r)\dfrac{x}{r} = \psi(r)\,x \\ \lambda'(r)\dfrac{y}{r} = \psi(r)\,y \\ \lambda'(r)\dfrac{z}{r} = \psi(r)\,z \end{cases} \qquad \begin{aligned} \lambda'(r) &= r\,\psi(r) \\ \lambda(r) &= \int r\,\psi(r)\,dr \end{aligned}$$

Caso quadratico $\qquad \vec{F}(\vec{r}) = \dfrac{K}{r^3}\,\vec{r} \qquad \psi(r) = \dfrac{K}{r^3}$

$$\lambda(r) = \int r \frac{k}{r^3}\, dr = k \int \frac{1}{r^2}\, dr = -\frac{k}{r} + c$$



$$\vec F(\vec r) = \vec \omega \times \vec r$$

$$\vec \omega \equiv (0, 0, \omega)$$

$$\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\vec F \equiv (-\omega y, \omega x, 0) = \omega(-y, x, 0)$$

è conservativo?

$$\exists\ \varphi(x,y,z) \quad \text{t.c.} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -y\omega \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x\omega \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad ?$$

no: $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = -1$ deriva la 1ª rispetto a y la 2ª rispetto a x

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 1$$

per teo di Schwartz non $\exists\ \varphi$.

Teo. Condizione necessaria affinché $\vec{F}$ (derivabile con continuità) sia conservativo è:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

---

in coordinate x_1, x_2, x_3 le condizioni risultano

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad \forall\, i, j$$

$$\vec{F}(x,y) = x\,\vec{i} - y\,\vec{j} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$$

$$\varphi(x,y) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = x$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + K(y)$$

$K(y)$: qualunque funzione di y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = h'(y) = -y$$

$$h(y) = -\frac{y^2}{2} + c$$

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + c$$

$$\vec{F} = (xy - \operatorname{sen} z)\,\vec{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}\right)\vec{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)\vec{k}$$

$$D = \{ z \neq 0 \}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x = \frac{\partial F_2}{\partial x} = x$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -\cos z = \frac{\partial F_3}{\partial x} = -\cos z$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = +\frac{e^y}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{e^y}{z^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = xy - \operatorname{sen} z \qquad \varphi = \frac{x^2 y}{2} - x \operatorname{sen} z + h(y,z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}$$

$$\frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{e^y}{z} \qquad h(y,z) = -\frac{e^y}{z} + h(z)$$

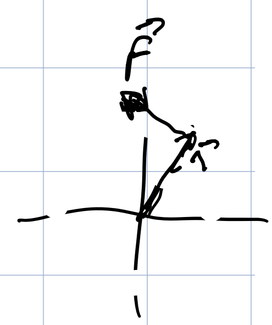
$$\varphi = \frac{x^2 y}{2} - x \operatorname{sen} z - \frac{e^y}{z} + h(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -x \cos z + \frac{e^y}{z^2} + h'(z) = \frac{e^y}{z^2} - x \cos z$$

$$h'(z) \equiv 0 \qquad h = \text{cont}$$

$$\varphi(x,y,t) = \frac{x^2 y}{2} - x \operatorname{sen} z - \frac{e^y}{z} + C$$

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}$$



$$\|\vec{F}(x,y)\| = \sqrt{\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$$

La cond. necessaria del teorema è verificata:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

<u>dominio D</u>: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

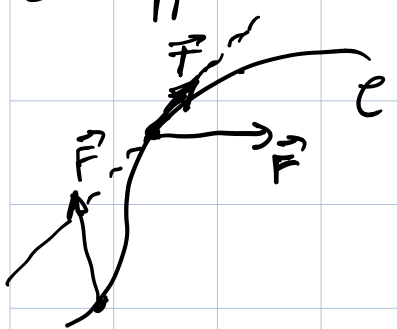
Si può verificare: (1) non $\exists\ \varphi : D \to \mathbb{R}$ t.c. $\nabla\varphi = \vec{F}$

(2) Se $D' \subset D$ con D' che abbia certe proprietà geometriche (che specificheremo) allora su D' $\vec{F}$ risulta conservativo (cioè troviamo una funzione $\varphi : D' \to \mathbb{R}$ t.c. $\nabla\varphi = \vec{F}$ in D')

<u>Lavoro di un campo lungo un cammino</u>

$\vec{F} : D \to \mathbb{R}^n \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad (n = 2 \text{ o } 3)$

Sia C una curva contenuta in D. Supponiamo C differenziabile a tratti.



Il lavoro è il prodotto della componente tangenziale di $\vec{F}$ integrata su C.

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

$\vec{T}$: vettore tangente unitario

$$\boxed{L = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds}$$

se C è parametrizzata $\vec{r} = \vec{r}(t) \quad a \le t \le b$

$$L = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \qquad \vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|$$

$$= \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt = \qquad ds = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$$

$$= \int_a^b \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt =$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

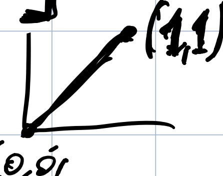
$$= \int_a^b \Big[F_1(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) +$$

$$+ F_3(x(t), y(t), z(t))\, z'(t) \Big]\, dt$$

es $\vec{F}(x,y) = y^2\, \vec{i} + 2xy\, \vec{j}$

$L = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\left[\text{NOTAZIONE SINTETICA} \quad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt \right]$ da $(0,0)$ a $(1,1)$

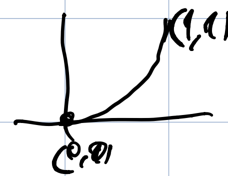
(a) lungo la retta $y = x$



$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 \end{cases}$$

$$L_1 = \int_0^1 \left(t^2\cdot 1 + 2t^2\cdot 1\right) dt = \int_0^1 3t^2\, dt = 1$$

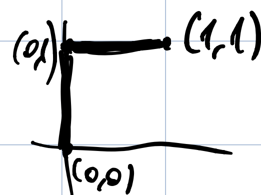
(b) lungo $y = x^2$



$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$L_2 = \int_0^1 \left[t^4\cdot 1 + 2t^3(2t)\right] dt = \int_0^1 5t^4\, dt = 1$$

(c)



Curve differenziabili a tratti: il lavoro è la somma dei lavori ottenuti nei tratti.

1° tratto: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \quad \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 1 \end{cases}$

$$\int_0^1 \left(t^2\cdot 0 + 0\cdot 1\right) dt = 0$$

2° tratto: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \end{cases}$

$$\int_0^1 (1 \cdot 1 + 2t \cdot 0)\, dt = 1$$

quindi $L_1 = L_2 = L_3 = 1$

<u>Teorema</u>. D dominio aperto connesso, $\vec{F}$ definito su D. Sono equivalenti:

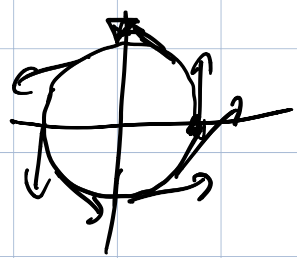
(1) $\vec{F}$ è conservativo (in D)

(2) $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ $\forall$ curva chiusa $\mathcal{C} \subset D$ (differenziabile a tratti)

(3) Dati $P_0, P_1 \in D$, il lavoro $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ha lo stesso valore $\forall$ curva $\mathcal{C}$ che connette P_0 e P_1

<u>oss</u>. Potrei definire $\vec{F}$ conservativo usando (2) o (3)

riprendiamo $\vec{F} = \frac{-y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j}$



il lavoro fatto su una circonferenza di centro l'origine è $\neq 0$ perché la componente tangenziale di $\vec{F}$ ha sempre lo stesso segno:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -r\,\mathrm{sen}\, t \\ y' = r\cos t \end{cases} \qquad (x', y') = (-y, x)$$

$$\vec{F} \cdot (-y, x) = \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} > 0$$

<u>dim teo.</u>

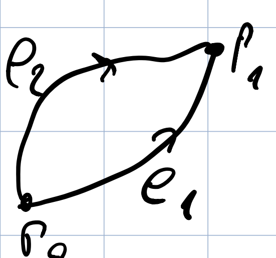
Prima dimostriamo l'equivalenza $(2) \Longleftrightarrow (3)$

<u>notazione</u> $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si intende C curva <u>chiusa</u>

$(2) \Longrightarrow (3)$

<u>ip</u> $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C \subset D$ chiusa.

<u>tesi</u>



se C_1 e C_2 uniscono P_0 e P_1

allora $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Sia $\mathcal{C}$ la curva chiusa data da:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup (-\mathcal{C}_2)$$

$-\mathcal{C}_2$ è la curva che va da P_1 a P_0 percorrendo $\mathcal{C}_2$ in senso opposto.

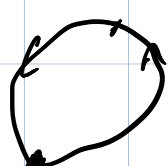
per ip. $$0 = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{-\mathcal{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$ (qed)

(3) $\Rightarrow$ (2)

ip. $$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$ se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ hanno gli stessi estremi.

tesi $$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall\, \mathcal{C} \text{ chiusa.}$$

$\mathcal{C}$  P_0

seconda curva $\mathcal{C}'$ chiusa: costante $\equiv P_0$ (cioè: $\vec{r}(t) \equiv P_0$, $a \le t \le b$)

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per ipotesi}}}{=} \int_{\mathcal{C}'} \vec{F}\cdot d\vec{r} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } \frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{0}}}{=} 0$$

(qed)

(1) $\Leftarrow$ (3)

(1) $\Rightarrow$ (3) ip. $\exists\, \varphi : D \to \mathbb{R} : \nabla\varphi = \vec{F}$

tesi: $\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ hanno gli stessi estremi

Siano $P_0, P_1 \in D$, $\mathcal{C}$ una curva che unisce P_0 e P_1.

$\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \le t \le b$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \Big[F_1(x(t),y(t),z(t))\, x'(t) + F_2(\cdots)\, y'(t) + F_3(\cdots)\, z'(t)\Big]\, dt =$$

$$= \int_a^b \Big[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))\, x'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))\, y'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))\, z'(t)\Big]\, dt =$$

$g(t) = \varphi(x(t), y(t), z(t))$ $\quad$ $g'(t)$ è quello che sta in parentesi [...]

teorema fondam. del calcolo integrale

$$= g(b) - g(a) = \varphi(x(b), y(b), z(b)) - \varphi(x(a), y(a), z(a))$$

$$= \varphi(P_1) - \varphi(P_0) \qquad \text{(qed)}$$

(3) $\Rightarrow$ (1) ...