Istituzioni di Matematica II, 27/11/2019.

Coloro che fanno il compitino devono risolvere gli esercizi 1,2,3; chi fa il compito straordinario deve risolvere tutti gli esercizi (eccetto la seconda parte del terzo).

1. Sia
$$f_a(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}z^3 + (x-a)(y^2+z^2) - x, \quad a \in \mathbb{R}.$$
Al variare di $a \in \mathbb{R}$, trovare tutti i punti critici della funzione f_a.
Classificare i punti critici di f_a quando $a = 0$.

2. Determinare gli estremi della funzione $f_a(x,y,z)$ dell'esercizio precedente quando $a = 0$, sul vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3. Sia A una matrice 2×2 e sia $\vec{F}$ il campo piano dato da
$$\vec{F}(x,y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
(cioè le due componenti del campo sono le due componenti del vettore colonna ottenuto moltiplicando la matrice A per il vettore colonna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$).
Dire per quali matrici il campo $\vec{F}$ è conservativo, e indicarne in questo caso un potenziale.
[solo compitino] Sia A simmetrica 2×2 e $\vec{F}$ un campo della forma
$$\vec{F} = f(x,y) \cdot A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$
con $f(x,y)$ funzione differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Dire che condizioni deve soddisfare A affinché esistano campi conservativi $\vec{F}$ con $f(x,y)$ non costante, e darne un esempio in questo caso.

4. Calcolare il volume del solido $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1, \ z \geq 1\}$.

5. Sia data una molecola A, A, A, G, B con 3 atomi A a formare un triangolo equilatero, 1 atomo G posto al centro del triangolo e un atomo sull'asse passante per il centro del triangolo e ortogonale al piano Π del triangolo, a distanza 1 dal piano Π.

   (a) Determinare il carattere della rappresentazione totale Γ del gruppo C_{3v} completando la tabella (I) allegata;

   (b) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)).

================================

Il gruppo $\mathcal{C}_{3v}$ ha 6 elementi $E, \ 2C_3, \ 3\sigma_v$ e ha 3 rappresentazioni irriducibili $(A_1, \ A_2, \ B)$ con tavola dei caratteri

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$2cos(\theta) \pm 1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_n	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\chi(R)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(I)

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n) * (2cos(\theta) \pm 1)$ secondo che l'elemento sia una rotazione propria o impropria di angolo θ.

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
B	2	-1	0