

Istituzioni di Matematiche II, 28/11/2022.

Coloro che fanno il compitino devono risolvere gli esercizi 1,2,3; chi fa il compitino straordinario deve risolvere tutti gli esercizi eccetto quelli indicati per il solo compitino

1. Sia $d(P, Q)$ la distanza euclidea tra i punti P e Q del piano. Siano $A \equiv (c, 0)$, $B \equiv (-c, 0)$ ($c > 0$) e sia $f_c(P) = d(P, A)d(P, B)$ il prodotto delle distanze euclidee tra il punto P e i due punti A e B . Determinare e classificare i punti critici di f_c .
2. Determinare gli estremi della funzione $f_c(P)$ dell'esercizio precedente, sul vincolo $V_{c,k} = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, A) + d(P, B) = k, k \geq 2c\}$.
3. Sia $f_\alpha(x) = (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{2\alpha}} x^{\frac{\alpha-1}{2}}$, $\alpha \geq 1$, $x \in [0, 1]$.
 - (a) Determinare il volume $V(\alpha)$ del solido D_α ottenuto ruotando il grafico della funzione attorno all'asse x in \mathbb{R}^3 con coordinate (x, y, z) . Dire se la funzione $V(\alpha)$ è integrabile in $[1, +\infty]$.
 - (b) [solo compitino] Determinare il volume W del solido compreso tra il piano x, z e la superficie ottenuta ruotando il grafico di f_1 (con $\alpha = 1$) attorno all'asse y . Dire quanto deve valere α affinché $V(\alpha) = W$.

4. Sia $\vec{F}(x, y, z)$, il campo di vettori dato in coordinate cartesiane ortogonali da:

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{1}{xyz} \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \right).$$

Descrivere il dominio di \vec{F} e dire se è semplicemente connesso (giustificandolo). Dire se il campo è conservativo e determinarne eventualmente un potenziale.

5. Data una molecola con atomi A in $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, e un atomo B in $(0, -1)$, a gruppo di simmetria C_{2v} . Determinare il carattere della rappresentazione totale Γ completando la tabella seguente

	E	C_2	$3\sigma_v$	σ'_v	
θ	(I)
$2\cos(\theta) \pm 1$	
u_n	
$\chi(R)$	

Decomporre la rappresentazione Γ in irriducibili utilizzando la tavola dei caratteri allegata.

Γ_i	E	C_2	σ_v	σ'_v
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1