Istituzioni di Matematiche II, 30/11/2018.

Coloro che fanno il compitino devono risolvere gli esercizi 1,2,3; chi fa il compito straordinario deve risolvere tutti gli esercizi.

1. Sia
$$f_a(x,y) = xy - a(x+y) - \frac{1}{3}(x^3+y^3), \quad a \in \mathbb{R}.$$
Per $a \geq 0$, trovare i punti critici della funzione f_a, e classificarli.

2. Determinare gli estremi della funzione $f_a(x,y)$ dell'esercizio precedente quando $a=0$, sul vincolo $x^2+y^2 = x+y$.

3. Siano $f(x,y)$, $g(x,y)$ funzioni differenziabili in un dominio D semplicemente connesso del piano. Dire che condizione devono soddisfare f e g affinché i campi piani
$$\vec{F} \equiv (f(x,y), g(x,y)), \quad \vec{G} \equiv (g(x,y), f(x,y))$$
siano entrambi conservativi in D.

   Qualora tali condizioni siano soddisfatte, siano $f_1(x,y)$, $g_1(x,y)$ potenziali rispettivamente di $\vec{F}$ e di $\vec{G}$. Dimostrare che anche f_1 e g_1 soddisfano tali condizioni e quindi anche i campi
$$\vec{F_1} \equiv (f_1(x,y), g_1(x,y)), \quad \vec{G_1} \equiv (g_1(x,y), f_1(x,y))$$
sono entrambi conservativi e hanno potenziali f_2, g_2 che verificheranno le stesse condizioni (quindi si potrà trovare f_3, g_3, ecc.)

   Fare un esempio di due funzioni f, g come sopra, con $f \neq g$,, indicando come è fatta la successione dei potenziali per tale esempio.

4. Calcolare il volume del dominio C compreso tra il paraboloide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq x^2 + y^2\}$ e la sfera $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$.

5. Sia data una molecola A, A, A, B, G con 3 atomi A a formare un triangolo equilatero, 1 atomo B posto sull'asse passante per il centro del triangolo e ortogonale al piano Π del triangolo, a distanza 1 dal piano Π, e 1 atomo G analogo a B, ma dalla parte opposta del piano Π rispetto a B.

   (a) Determinare il carattere della rappresentazione totale Γ del gruppo C_{3v} completando la tabella (I) allegata;

   (b) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)).

==============================

Il gruppo $\mathcal{C}_{3v}$ ha 6 elementi $E, \ 2C_3, \ 3\sigma_v$ e ha 3 rappresentazioni irriducibili $(A_1, \ A_2, \ B)$ con tavola dei caratteri

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...
u_n	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...

(I)

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n) * (2cos(\theta) \pm 1)$ secondo che l'elemento sia una rotazione propria o impropria di angolo θ.

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
B	2	-1	0