Compito 15/1/2020

Nome e cognome (stampatello) ....;

matricola..............................

PRIMA PARTE

1. Determinare tutti i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x+2y}$$

e classificarli.

2. Trovare gli eventuali estremi vincolati della $f(x,y)$ dell'esercizio precedente sul vincolo $x^2+y^2=9$, specificando quali sono massimi e quali minimi assoluti.

3. Descrivere il dominio D in $\mathbb{R}^3$ del campo

$$\vec{F}(x,y,z) \equiv (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 1)$$

e dire se D è semplicemente connesso.

Calcolare il lavoro di $\vec{F}$ lungo la circonferenza

$$x = cos(t),\ y = sen(t),\ z = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Discutere la conservatività di $\vec{F}$ giustificando la risposta: se $\vec{F}$ è conservativo in D determinarne un potenziale, altrimenti dire perché non lo è.

Nome e cognome (stampatello) ....;

matricola..............................

SECONDA PARTE

1. Dato il disco $D_{a,r}$ contenuto nel piano x, z di $\mathbb{R}^3$ di centro il punto $(a, 0, 0)$ e raggio r (con $r < a$), sia $T_{a,r}$ il solido in $\mathbb{R}^3$ ottenuto facendo ruotare $D_{a,r}$ attorno all'asse z.

   (a) Disegnare (approssimativamente) $T_{a,r}$ e descriverlo tramite disequazioni (si possono usare coordinate diverse dalle cartesiane, ad esempio le coordinate cilindriche).

   (b) Calcolare il volume di $T_{a,r}$

   (c) [solo II compitino] Data la curva che giace sulla superficie di $T_{a,r}$ che è definita dalla parametrizzazione in coordinate cilindriche
   $$\begin{cases} \rho &= a + r\ cos(\theta) \\ z &= r\ sen(\theta) \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

      i. Disegnare (approssimativamente) la curva sulla superficie di $T_{a,r}$.

      ii. Impostare l'integrale curvilineo che calcola la lunghezza della curva.

2. Sia data una molecola a forma di tetraedro regolare, con 4 atomi uguali nei punti $A_1 = (0, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 1)$, $A_3 = (1, 0, 1)$, $A_4 = (1, 1, 0)$, che quindi formano una figura con gruppo di simmetria $\mathcal{T}_d$.

   (a) Scegliere una delle 6 simmetrie S_4 e dire da dove passa l'asse di rotazione e il piano di simmetria associati. Scrivere un'equazione cartesiana per tale piano.

   (b) Determinare il carattere della rappresentazione totale Γ completando la tabella (I) allegata;

   (c) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I));

   (d) [solo II compitino]

      i. Scrivere il carattere della rappresentazione Γ' di $\mathcal{T}_d$ (di ordine 4) che si ottiene prendendo per ogni vertice A_i un versore che punta verso il baricentro, e decomporre Γ' in irriducibili.

      ii. [facoltativo] Supponiamo che un sistema a due gradi di libertà (x_1, x_2) abbia energia cinetica e potenziale date da
      $$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2), \quad V = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2.$$
      Scrivere le coordinate normali del sistema.

Il gruppo $\mathcal{T}_d$ ha 24 elementi E, $8C_3$, $3C_2$, $6\sigma_d$, $6S_4$ e ha 5 rappresentazioni irriducibili (A_1, A_2, B, F_1, F_2) con tavola dei caratteri

Γ_i	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B	2	-1	2	0	0
F_1	3	0	-1	1	-1
F_2	3	0	-1	-1	1

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando,

per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $u_n * (2cos(\theta)+1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ, si considera il numero u_n di atomi fissi e si moltiplica $u_n * (2cos(\theta) - 1)$.

	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
θ	...	...	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...	...	...
u_n	...	...	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...	...	...

(I)