

Compito 5/6/2019

Nome e cognome (stampatello)

matricola.....

1. Sia $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \alpha^2 xy^2 - x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare tutti i punti critici di $f(x, y)$ e classificarli.
2. Determinare gli estremi vincolati della $f(x, y)$ dell'esercizio precedente, sul vincolo $x^2 + \alpha^2 y^2 = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Dato il campo

$$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + (1+z)\vec{k}$$

calcolare il lavoro di \vec{F} lungo la curva

$$(\cos(t), \sin(t), t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Il campo \vec{F} è conservativo? Scrivere un campo \vec{G} tale che il campo $\vec{F} + \vec{G}$ sia conservativo.

4. Nello spazio euclideo con coordinate (x, y, z) sia S il segmento che congiunge i due punti $P \equiv (a, 0, 0)$, $Q \equiv (0, b, 0)$, $a, b > 0$. Siano K e K' i solidi ottenuti ruotando S attorno all'asse x e y rispettivamente. Calcolare i volumi di K e di K' e dire sotto quali condizioni risultano uguali.

Calcolare le coordinate dei baricentri B di K e B' di K' e dimostrare che il segmento BB' è parallelo a S .

5. Sia data la molecola con atomi A nei punti $(i, 0, 0)$ e $(-i, 0, 0)$, $i = 1, \dots, m$, atomi B nei punti $(0, j, 0)$ e $(0, -j, 0)$, $j = 1, \dots, n$, e atomi C nei punti $(0, 0, k)$ e $(0, 0, -k)$, $k = 1, \dots, p$ (dove m, n, p sono numeri interi positivi assegnati. Ci sono quindi in totale $2m + 2n + 2p$ atomi).

(a) Quando $m = n = p = 1$ (cioè ci sono 2 atomi su ogni asse) determinare il carattere della rappresentazione totale Γ del gruppo di simmetria D_{2h} completando la tabella (I) allegata e decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)).

(b) In generale, dimostrare che il numero di volte che le rappresentazioni A_{1g} e A_{1u} compaiono è indipendente dai valori di m, n, p [(nota aggiunta) si intende: trovare la formula generale per il numero di volte che tali rappresentazioni appaiono: tale formula non dipende dai singoli valori di m, n, p ma...vedere soluzione]

Dire se è possibile ricostruire i valori di m, n, p dalla conoscenza della decomposizione di Γ in irriducibili.

=====

Il gruppo D_{2h} ha 8 rappresentazioni irriducibili con tavola dei caratteri

D_{2h}	Γ_i	E	C_2^z	C_2^y	C_2^x	i	iC_2^z	iC_2^y	iC_2^x
	A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1
	A_{1u}	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	B_{1g}	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	B_{1u}	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	B_{2g}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	B_{2u}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
	B_{3g}	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	B_{2u}	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

(*)

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n) * (2\cos(\theta) \pm 1)$ a seconda che l'elemento sia una rotazione propria o impropria di angolo θ .

D_{2h}	E	C_2^z	C_2^y	C_2^x	i	iC_2^z	iC_2^y	iC_2^x
θ
$2\cos(\theta) \pm 1$
u_n
$\chi(R)$

(I)