Compito 16/1/2019

Nome e cognome (stampatello) ....;

matricola..............................

PRIMA PARTE

1. Determinare tutti i punti critici della funzione

$$f(x,y) = e^{x^2+2y^2} + e^{-x^2+1} + e^{-2y^2+1}.$$

Classificare i punti critici che si trovano nel primo quadrante $\{x \geq 0, y \geq 0\}$.

Dire se esiste $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$ e in caso affermativo calcolarlo.

2. Trovare gli eventuali estremi vincolati della $f(x,y)$ dell'esercizio precedente sul vincolo $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$, specificando quali sono massimi e quali minimi assoluti.

3. Descrivere il dominio D in $\mathbb{R}^3$ del campo

$$\vec{F}(x,y,z) \equiv (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, 1)$$

e dire se D è semplicemente connesso. Discutere la conservatività di $\vec{F}$ giustificando la risposta: se $\vec{F}$ è conservativo in D determinarne un potenziale, altrimenti dire perché non lo è.

Calcolare il lavoro di $\vec{F}$ lungo il percorso elicoidale

$$x = cos(t),\ y = sen(t),\ z = t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Nome e cognome (stampatello) ....;

matricola.............................

SECONDA PARTE

1. Consideriamo l'insieme T_α dei punti $\vec{r} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che il vettore posizione $\vec{r}$ forma un angolo minore di α con l'asse z posistivo. Sia inoltre $S_\beta = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : \ \|\vec{r}\| \leq \beta\}$ il disco di raggio β con centro l'origine.
   (a) Calcolare il volume di $D_{\alpha,\beta} = T_\alpha \cap S_\beta$.
   (b) Calcolare le coordinate del baricentro di $D_{\alpha,\beta}$.
   (c) [solo II compitino] Individuare, se esistono, quelle costanti $\gamma > 0$ per cui, posto $\alpha = \frac{1}{\beta^\gamma}$, si abbia
   $$\lim_{\beta\to\infty} Volume(D_{\frac{1}{\beta^\gamma},\beta}) < \infty.$$

2. Data la molecola con atomi uguali nei punti
   $$A_0 \equiv (0,0,0),\ A_1 \equiv (1,0,0),\ A_2 \equiv (0,1,0),\ A_3 \equiv (0,0,1)$$
   (a) osservare che il gruppo di simmetria è un C_{3v} descrivendone tutte le simmetrie e le rotazioni: per ogni simmetria propria indicare l'asse di rotazione, scrivendone un'equazione parametrica, per quelle improprie indicare il piano di simmetria, scrivendone un'equazione cartesiana.
   (b) determinare il carattere della rappresentazione totale Γ completando la tabella (I) allegata;
   (c) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I));
   (d) [solo II compitino, facoltativo per chi fa il compito] dire come cambiano (in funzione di n) le componenti irriducibili di Γ aggiungendo n atomi nei punti $(1,1,1),\ (2,2,2),\ \ldots,(n,n,n)$.

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...
u_n	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...

(I)

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n)*(2cos(\theta)\pm1)$ secondo che l'elemento sia una rotazione propria o impropria di angolo θ.

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
B	2	-1	0