

Nome e cognome (stampatello)

matricola.....

PRIMA PARTE - II

1. (a) Studiare i punti critici di

$$f_a(x, y) = x^2 + ay^2 - 2x - 4ay + 5$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

- (b) Determinare i punti di minimo vincolato e di massimo vincolato di $f(x, y)$ soggetta al vincolo $x + y = 3$.

2. (a) Sia

$$\vec{F}(\vec{r}) = r^2 \vec{v} + 2(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{r},$$

dove $\vec{r} \equiv (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ è un vettore fisso (il prodotto $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ è il prodotto scalare canonico). Dire se \vec{F} è conservativo ed eventualmente trovarne un potenziale.

- (b) Calcolare il lavoro di \vec{F} lungo il segmento che unisce l'origine con il secondo estremo di \vec{v} , quando $\vec{v} \equiv (1, 1, 0)$.

Nome e cognome (stampatello)

matricola.....

SECONDA PARTE - II

1. (a) Sul cono $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (z - 1)^2, 0 \leq z \leq 1\}$ calcolare l'integrale

$$\iiint_C (1 - z)^2 \, dx dy dz$$

- (b) Interpretando $(1 - z)^2$ come la densità di massa nel punto (x, y, z) di C , determinare il centro di massa di C .
2. (a) Data una molecola AAAAB con i quattro A disposti ai vertici di un tetraedro regolare e il B al centro del tetraedro, cercare di giustificare la seguente affermazione: il gruppo di simmetria della molecola, \mathcal{T}_d , è in corrispondenza biunivoca (isomorfismo) col gruppo delle permutazioni di 4 elementi.
- (b) Determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta) Γ completando la tabella (I) allegata;
- (c) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)) e specificare le frequenze che appaiono in Ir e Ra .

Il gruppo \mathcal{T}_d ha 24 elementi $E, 8C_3, 3C_2, 6\sigma_d, 6S_4$ e ha 5 rappresentazioni irriducibili (A_1, A_2, B, F_1, F_2) con tavola dei caratteri

Γ_i	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$	IR	Ra
A_1	1	1	1	1	1	no	si
A_2	1	1	1	-1	-1	no	no
B	2	-1	2	0	0	no	si
F_2	3	0	-1	1	-1	no	si
F_2	3	0	-1	-1	1	si	si

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale ridotta si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ , il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n - 2) * (2\cos(\theta) + 1)$; se l'elemento è una rotazione impropria di angolo θ , si considera il numero u'_n di atomi fissi e si moltiplica $u'_n * (2\cos(\theta) - 1)$.

	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$	
θ	
$2\cos(\theta) \pm 1$	(I)
$u_n - 2, u'_n$	
$\chi(R)$	

Numero frequenze normali IR : ...

Numero frequenze normali Ra : ...