Nome e cognome (stampatello) ....;

matricola.............................

Regolamento. *(Per chi fa il secondo compitino: fare la prima parte barrando una sola risposta o scrivendo negli spazi assegnati; fare anche gli esercizi 3 e 4. Chi fa tutto il compito: non fare la prima parte ma solo la seconda).*

PRIMA PARTE (solo per chi fa solo il secondo compitino)

1)[1pto per ogni risposta giusta] Sia

$$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = z = 0, x > 0\}.$$

Allora:

A connesso $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$; A convesso $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$; A stellato $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$

2) [3pti] Scrivere il modulo del determinante della jacobiana della trasformazione

$$x = vw; \ y = uw; \ z = uv$$

tra le coordinate (x, y, z) e le coordinate (u, v, w).

$$|det \ J| = \ ....$$

Chi è il luogo in cui la trasformazione è localmente invertibile?

....

3)[3pti] Sia $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ la sfera di raggio 2. Il punto P di S avente coordinate sferiche $(2, \pi/2, \pi/4)$ ha coordinate cartesiane:

$$x = \ ....; \ y = \ ....; \ z = \ ....$$

Scrivere ll'elemento d'arco ds per la curva che in coordinate sferiche è data da $\theta \to (2, \theta, \pi/4)$.

$$ds = \ ....$$

4) [3pti] Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \ y \geq 0\}$. Scrivere la forma iterata dell'integrale come dominio $y-$semplice:

$$\iint_E f(x, y)dxdy \ = \ ....$$

5) [3pti] Il gruppo G delle rotazioni di un quadrato (attorno ad un asse perpendicolare al piano del quadrato e passante per il baricentro del quadrato) è un gruppo di ordine $o(G) =$ ....

Il gruppo G è isomorfo al gruppo C_{2v} $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$

SECONDA PARTE (scrivere su un foglio)

Esercizio 1 Sia $f(x,y) = \frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

(a) Determinare e classificare i punti critici di f.

(b) Determinare gli estremi vincolati di f sul vincolo $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\}$.

Esercizio 2 (a) Sia $\vec{F} = \nabla(e^{-x^2+2y^2+2})$ un campo conservativo. Dimostrare che anche $\vec{G} = e^{-x^2+2y^2+2} \nabla (e^{-x^2+2y^2+2})$ è conservativo.

(b) Dimostrare più in generale che se $\vec{F}(x,y,z)$ è un campo conservativo con potenziale $\varphi(x,y,z)$. allora $\vec{G} = \varphi^k \vec{F}$ è conservativo per ogni k intero positivo [sugg.: trovare un'espressione per $\nabla(\varphi^n)$].

Esercizio 3 (a) Calcolare il volume del solido intersezione del paraboloide

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 2z\}$$

e della sfera

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$$

(b) Dimostrare che il baricentro del solido è sull'asse z

Esercizio 4 Data una molecola AAA a forma di triangolo equilatero con gli A nei tre punti $A_1 = (1,0,0), \ A_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), \ A_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

(a) descrivere le 12 operazioni del gruppo di simmetria D_{3h} della molecola:

$$E, \sigma_h, 2C_3, 2S_3, 3C_2', 3\sigma_v$$

($2C_3$ significa che ci sono 2 assi ternari: dire quali sono; analogamente per $2S_3$ ci sono 2 assi ternari impropri, ecc.)

(b) Dati 3 versori applicati nei vertici A_1, A_2, A_3, che puntano verso il centro del triangolo, scrivere il carattere della rappresentazione Γ di ordine 3 del gruppo D_{3h} associata, completando la tabella (I) (per ogni elemento del gruppo, scrivere la traccia della matrice $3x3$ associata; i due C_3 sono coniugati nel gruppo quindi hanno lo stesso carattere, così i due S_3, ecc.)

(c) (*facoltativo*) Usando la tavola dei caratteri irriducibili, decomporre Γ nelle sue componenti irriducibili.

	E	σ_h	$2C_3$	$2S_3$	$3C_2'$	$3\sigma_v$
$\chi(\Gamma)$	...	...	...	...	...	...

(I)

Il gruppo $\mathcal{D}_{3h}$ ha 12 elementi $E, \sigma_h, 2C_3, 2S_3, 3C_2', 3\sigma_v$ con 6 rappresentazioni irriducibili con tavola dei caratteri

Γ_i	E	σ_h	$2C_3$	$2S_3$	$3C_2'$	$3\sigma_v$
A_1'	1	1	1	1	1	1
A_2'	1	1	1	1	-1	-1
A_1''	1	-1	1	-1	1	-1
A_2''	1	-1	1	-1	-1	1
E'	2	2	-1	-1	0	0
E''	2	-2	-1	1	0	0