8/6/2021

Scrivere chiaramente ogni risposta, riportando solo i conti necessari a giustificarla, iniziando col suo numero: 1,2, 3a, ecc., seguendo la numerazione degli esercizi. Tempo: 2 ore.

1. Sia A una matrice simmetrica di ordine 3 e sia $\underline{b} \equiv (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ un vettore. Posto $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{2}\, \underline{x}^T\ A\ \underline{x} - < \underline{b}, \underline{x} > = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^{3} b_i x_i.$$

   Dimostrare che i punti critici di f sono le soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$. Calcolare la matrice hessiana di f e, quando A è non-singolare (cioè $det(A) \neq 0$), classificare i punti critici (in dipendenza di A).

2. Sia $f(\underline{x}) = \frac{1}{2}\, \underline{x}^T\ A\ \underline{x}$ la funzione del punto precedente con $\underline{b} = 0$, e sia $g(\underline{x}) = \frac{1}{2} < \underline{x}, \underline{x} > -1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 1$. Dimostrare che i punti di estremo vincolato, sul vincolo $g(\underline{x}) = 0$, stanno fra gli autovettori della matrice A. Determinare gli estremi vincolati se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Dato il campo

$$\vec{F} = \frac{xy^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \vec{i} - (2y\sqrt{a^2 - x^2})\vec{j}, \quad a > 0,$$

   dire (giustificandolo) se $\vec{F}$ è conservativo. In caso affermativo, calcolarne un potenziale.

4. Calcolare il volume del dominio

$$D(a, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\},$$

   con $a > 0, r > 0$.

5. Consideriamo il cubo in $\mathbb{R}^3$ i cui vertici sono tutti i punti di coordinate (x_1, x_2, x_3) tali che x_i vale o 0 oppure 1.

   (a) Dato un atomo A posto nel punto $(0, 0, 0)$ del cubo, specificare le coordinate di altri tre vertici del cubo tali che inserendovi tre atomi B la corrispondente molecola $ABBB$ abbia gruppo di simmetria C_{3v}.

   (b) Completare la tabella I per il carattere Γ della rappresentazione totale.

   (c) Scrivere la decomposizione di Γ in irriducibili usando la tabella II.

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...
u_n	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...

(I)

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
B	2	-1	0

(II)