Istituzioni di Matematiche II, 10/1/2023.

[compitino: esercizi 3b, 4,5. Compito nuovo programma: tutto meno esercizio 3a e 5c; compito vecchio programma: tutto meno esercizio 3b e 5c]

1. Sia $c > 0$ e $A_1 \equiv (c, 0),\ A_2 \equiv (-c, 0) \in \mathbb{R}^2$. Siano $r_1,\ r_2$ le distanze del punto (x, y) da $A_1,\ A_2$ rispettivamente, e sia
$$f(x, y) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$
Trovare e classificare i punti critici di f.

2. Determinare gli estremi della funzione $f(x, y)$ dell'esercizio precedente, sul vincolo $r_1 + r_2 = k$ $(k > 2c)$.

3. (a) [solo quelli col vecchio programma] Sia $y = e^{-kx},\ k > 0, x \geq 0$. Dire se il volume dei domini $D_x,\ D_y$ ottenuti ruotando la funzione data in $\mathbb{R}^3$, con coordinate x, y, z, attorno all'asse $x,\ y$ rispettivamente è finito ed eventualmente calcolarlo.
   (b) [compitino e nuovo programma] In $L^2[-1, 1]$ ortonormalizzare i polinomi $1, x, x^2$ (il prodotto in $L^2[a, b]$ è $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$).
   In $L^2[0, 2\pi]$, calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f(x) = x$ (rispetto al sistema ortonormale $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ f_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(nx)$, $f_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(nx);\ n \geq 1$; formula V.11 del libro)

4. Sia $\vec{F}(x, y, z)$, il campo di vettori dato in coordinate cartesiane ortogonali da:
$$\vec{F}(x, y, z) = (\frac{1}{x^2} , \frac{y}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}).$$
Descrivere il dominio di $\vec{F}$ e dire se è: connesso; semplicemente connesso (giustificandolo). Dire se il campo è conservativo e determinarne eventualmente un potenziale.

5. Data una molecola con atomi A in $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$,
   (a) quanto può valere $z \in \mathbb{R}$ in modo che aggiungendo un atomo A in $(0, 0, z)$ il gruppo di simmetria sia C_{3v}? Se $z = 2$ qual è il gruppo di simmetria?
   (b) Nel caso z sia scelto in modo che la simmetria sia data da C_{3v}, determinare il carattere della rappresentazione totale Γ completando la tabella (I) e decomporre Γ in irriducibili utilizzando la tavola allegata (II).
   (c) [solo compitino] se $z = 2$, qual è la tavola dei caratteri del gruppo di simmetria?

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...
u_n	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...

(I)

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
B	2	-1	0

(II)