Esame Istituzioni Matematica II, 11/7/2011 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4
studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 2,3,4
studenti del vecchio ordinamento (prima dei crediti): es: 2,3,4,5

1. (a) Data una molecola con n atomi, definire cosa si intende per "rappresentazione totale" del gruppo di simmetria G della molecola.
   (b) Data una molecola a forma di rettangolo A, B, C, D, tale che $A = C$ e $B = D$ (gli atomi opposti sono identici) descrivere geometricamente gli elementi del gruppo di simmetria C_{2h} della molecola.
   (c) Determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta) Γ del gruppo di simmetria C_{2h} completando la tabella (I) allegata;
   (d) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)).

2. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Calcolare il
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$
   (giustificando la risposta) e dedurre che la funzione é continua in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.
   (b) Determinare le derivate prime parziali di f e il piano tangente al grafico nel punto $(1,0)$.
   (c) La funzione é derivabile in $(0,0)$? (giustificare la risposta).
   (d) Trovare gli eventuali massimi e minimi relativi della funzione.
   (e) Trovare gli estremi vincolati di $f(x,y)$ con il vincolo
$$x^2 + y^2 = 2.$$

3. (a) Dire per quali $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ il campo F dato da
$$F(x,y,z) \equiv (x + ay + \frac{1}{a}z, y + az + \frac{1}{a}x, z + ax + \frac{1}{a}y) \ ,$$
   é conservativo.
   (b) Calcolare il lavoro del campo F dal punto $A \equiv (0,0,0)$ al punto $B \equiv (3,3,3)$ lungo il segmento congiungente A e B, nei due casi: $a = 1$ e $a = -1$.

4. Dato il piano Π_a, $a \in \mathbb{R}$, di equazione
$$x + 2y + 3z = a,$$
   determinare $a > 0$ tale che il volume del tetraedro determinato dal piano Π_a e dai tre piani coordinati sia uguale al volume di una sfera di raggio 2.

5. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n>1} \frac{n}{(n-1)(n+1)}.$$

Il gruppo $\mathcal{C}_{2h}$ ha 4 elementi $E,\ C_2,\ \sigma_h,\ i$ e ha 4 rappresentazioni irriducibili $(A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2)$ con tavola dei caratteri

Γ_i	E	C_2	σ_h	i	IR	Ra
A_1	1	1	1	1		x^2, y^2, z^2, xy
A_2	1	1	-1	-1	z	
B_1	1	-1	-1	1		$xz,\ yz$
B_2	1	-1	-1	-1	$x,\ y$	

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale ridotta si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n - 2) * (2cos(\theta) + 1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ, si considera il numero u'_n di atomi fissi e si moltiplica $u'_n * (2cos(\theta) - 1)$.

	E	C_2	σ_h	i
θ	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$2cos(\theta) \pm 1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$u_n - 2, u'_n$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\chi(R)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(I)

Numero frequenze normali IR: $\dots$
Numero frequenze normali Ra: $\dots$