

**Esame Istituzioni Matematica II, 12/6/2013 (prof. M. Salvetti)**

*studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4*

*studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 1,2,3*

1. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = e^{2-2x^2-y^2-xy}.$$

- (a) Studiare gli eventuali punti critici di  $f(x, y)$ .  
(b) Sia data la linea di livello  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = e\}$  di  $f$ . Determinare i punti di  $C$  che si trovano alla massima distanza dall'origine e quelli che si trovano alla minima distanza dall'origine (suggerimento: utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con  $C$  come vincolo: di quale funzione vanno cercati gli estremi?)

2. (a) Sia

$$\vec{F}_a(x, y, z) = (a^4yz, a^6xz, a^2xy).$$

Determinare gli  $a \in \mathbb{R}$  per cui  $\vec{F}_a$  è conservativo.

- (b) Per  $a = 1$ , determinare le equazioni delle linee di forza del campo.

3. (a) Calcolare

$$I_a := \iint_{D_a} \frac{1}{2x+3y} dx dy$$

dove  $D_a$  è il triangolo piano determinato dai punti

$$P_1(a, 0); P_2(2, 0); P_3(2, 2), \quad 0 < a < 2.$$

- (b) Calcolare, se esiste, il  $\lim_{a \rightarrow 0^+} I_a$ .

4. Sia data una molecola  $A, A, A, B, C$  a forma di doppia piramide retta a base un triangolo equilatero  $A, A, A$  (con  $B$  e  $C$  che stanno sull'asse ortogonale al triangolo e passante per il suo baricentro, da parti opposte rispetto al triangolo).

- (a) Determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta)  $\Gamma$  del gruppo di simmetria  $C_{3v}$  completando la tabella (I) allegata;  
(b) Decomporre la rappresentazione  $\Gamma$  nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)) e specificare le frequenze che appaiono in  $Ir$  e  $Ra$ .

Il gruppo  $C_{3v}$  ha 6 elementi  $E$ ,  $2C_3$ ,  $3\sigma_v$ , e ha 3 rappresentazioni irriducibili ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $E$ ) con tavola dei caratteri

$\Gamma_i$	$E$	$2C_3$	$3\sigma_v$	Ir	Ra
$A_1$	1	1	1	$z$	$x^2 + y^2, z^2$
$A_2$	1	1	-1		
$E$	2	-1	0	$(x, z)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

(\*)

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale ridotta si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo  $\theta$ , il numero  $u_n$  di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando  $(u_n - 2) * (2\cos(\theta) + 1)$ ; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo  $\theta$ , si considera il numero  $u'_n$  di atomi fissi e si moltiplica  $u'_n * (2\cos(\theta) - 1)$ .

	$E$	$2C_3$	$3\sigma_v$
$\theta$	...	...	...
$2\cos(\theta) \pm 1$	...	...	...
$u_n - 2, u'_n$	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...

(I)

Numero frequenze normali  $IR$ : ...

Numero frequenze normali  $Ra$ : ...