Esame Istituzioni Matematica II, 15/1/2013 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4
studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 1,2,3

1. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x,y) \ = x^4 + y^4 - ax^2 - by^2, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

   (a) Studiare i punti critici di $f(x,y)$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinare i massimi e i minimi vincolati di $f(x,y)$ con il vincolo

$$2bx^2 + 2ay^2 = ab$$

   nell'ipotesi che $a \geq 0$ e $b \geq 0$ (nota: se a e b sono entrambi 0, il vincolo è tutto $\mathbb{R}^2$, altrimenti il vincolo è una certa curva che dipende dai parametri a e b)

2. Dato il punto $P_1 \equiv (a,0,0)$ e il punto $P_2 \equiv (-a,0,0)$, $a > 0$, sia $\vec{F}$ il campo definito nel punto $P \equiv (x,y,z)$ come

$$\vec{F}(P) \ = \ \frac{\overrightarrow{P_1P}}{||\overrightarrow{P_1P}||^3} + \frac{\overrightarrow{P_2P}}{||\overrightarrow{P_2P}||^3}.$$

   (a) Scrivere le coordinate del campo $\vec{F}(x,y,z)$.

   (b) Dire qual è il dominio D del campo e dire (cercando di giustificarlo) se D è semplicemente connesso.

   (c) Dire (giustificandolo) se il campo è conservativo e in caso affermativo determinarne un potenziale.

3. (a) Sia

$$D_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1 + z^2, \ 0 \leq \ z \ \leq a, \quad a > 0\}.$$

   Calcolare il volume di D_a.

   (b) Sia

$$E_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 + z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 + a^2, \ 0 \leq \ z \ \leq a, \quad a > 0\}.$$

   Calcolare

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{vol(D_a)}{vol(E_a)}$$

4. Sia data una molecola A, A, B, B, C, C con 6 atomi in $\mathbb{R}^3$, con gli $A \equiv (\pm 1, 0, 0)$, $B \equiv (0, \pm 1, 0)$ e $C \equiv (0, 0, \pm 1)$.

   (a) Determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta) Γ del gruppo di simmetria D_{2h} completando la tabella (I) allegata;

   (b) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)) e specificare le frequenze che appaiono in Ir e Ra.

(c) Utilizzare le formule note per dimostrare che un gruppo G è abeliano se e solo se tutte le sue rappresentazioni irriducibili hanno ordine 1.

Giustificare inoltre l'asserzione: una molecola che abbia un gruppo di simmetria abeliano non può avere frequenze di vibrazione multiple.

==============================

Il gruppo D_{2h} ha 8 rappresentazioni irriducibili con tavola dei caratteri

D_{2h}		Γ_i	E	C_2^z	C_2^y	C_2^x	i	iC_2^z	iC_2^y	iC_2^x
x^2, y^2, z^2		A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1
		A_{1u}	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
xy		B_{1g}	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	z	B_{1u}	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
xz		B_{2g}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	y	B_{2u}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
yz		B_{3g}	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	x	B_{2u}	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

(∗)

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale ridotta si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e motiplicando $(u_n - 2) * (2cos(\theta) + 1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ e u'_n è il numero di atomi che rimangono al loro posto, si moltiplica $u'_n * (2cos(\theta) - 1)$.

D_{2h}	E	C_2^z	C_2^y	C_2^x	i	iC_2^z	iC_2^y	iC_2^x
θ	...	...	...	...	...	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...	...	...	...	...	...
$u_n - 2, u'_n$	...	...	...	...	...	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...	...	...	...	...	...

(I)

Numero frequenze normali IR: ....

Numero frequenze normali Ra: ....