

**Esame Istituzioni Matematica II**, 1/10/2010 (prof. M. Salvetti)

*studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4*

*studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 2,3,4*

*studenti del vecchio ordinamento (prima dei crediti): es: 2,3,4,5*

1. Data una molecola  $NH_3$ , disposta con  $N$  al centro di un triangolo equilatero e gli  $H$  ai vertici,
  - (a) Determinare il carattere della rappresentazione totale  $\Gamma$  del gruppo di simmetria  $D_{3h}$  della molecola completando la tabella (I) allegata.
  - (b) Decomporre la rappresentazione totale  $\Gamma$  (di ordine 12) nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I) ).

2. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = \sqrt{1 + xy}.$$

- (a) Descrivere il dominio di  $f$  e le sue linee di livello.
- (b) Scrivere le derivate prime parziali di  $f$ , calcolare il gradiente di  $f$  nel punto  $P \equiv (0, 1)$  e l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  in tale punto.
- (c) Dire se la funzione ha punti critici ed eventualmente classificarli.
- (d) Trovare gli estremi vincolati di  $f(x, y)$  con la condizione

$$x^2 + y^2 = 2.$$

3. (a) Dire (giustificandolo) se il campo

$$F(x, y, z) \equiv (yz, xz, xy)$$

è conservativo. In caso affermativo, determinarne un potenziale.

- (b) Data la spirale di equazione

$$\begin{aligned}x &= e^{-\theta} \cos(\theta) \\y &= e^{-\theta} \sin(\theta) \\z &= 0\end{aligned}$$

( $\theta \geq 0$ ), si calcoli il lavoro del campo sull'arco corrispondente all'intervallo

$$\theta \in [0, 2\pi].$$

- (c) (facoltativo) Quanto viene il lavoro sull'arco corrispondente a  $[0, +\infty)$ ?

4. Calcolare il volume del solido  $D$  definito da:

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, x + z \leq 1\}.$$

5. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n>0} \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$

Il gruppo  $D_{3h}$  ha 12 elementi  $E, \sigma_h, 2C_3, 2S_3, 3C'_2, 3\sigma_v$  e ha 6 rappresentazioni irriducibili ( $A_1^1, A_2^1, A_1^2, A_2^2, B^1, B^2$ ) con tavola dei caratteri

| $\Gamma_i$ | $E$ | $\sigma_h$ | $2C_3$ | $2S_3$ | $3C'_2$ | $3\sigma_v$ |
|------------|-----|------------|--------|--------|---------|-------------|
| $A_1^1$    | 1   | 1          | 1      | 1      | 1       | 1           |
| $A_2^1$    | 1   | 1          | 1      | 1      | -1      | -1          |
| $A_1^2$    | 1   | -1         | 1      | -1     | 1       | -1          |
| $A_2^2$    | 1   | -1         | 1      | -1     | -1      | 1           |
| $B^1$      | 2   | 2          | -1     | -1     | 0       | 0           |
| $B^2$      | 2   | -2         | -1     | 1      | 0       | 0           |

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo  $\theta$ , il numero  $u_n$  di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando  $u_n * (2\cos(\theta) + 1)$ ; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo  $\theta$ , si moltiplica  $u_n * (2\cos(\theta) - 1)$ .

|                       | $E$ | $\sigma_h$ | $2C_3$ | $2S_3$ | $3C'_2$ | $3\sigma_v$ |
|-----------------------|-----|------------|--------|--------|---------|-------------|
| $\theta$              | ... | ...        | ...    | ...    | ...     | ...         |
| $2\cos(\theta) \pm 1$ | ... | ...        | ...    | ...    | ...     | ...         |
| $u_n$                 | ... | ...        | ...    | ...    | ...     | ...         |
| $\chi(R)$             | ... | ...        | ...    | ...    | ...     | ...         |

(I)