Esame Istituzioni Matematica II, 2/4/2009 (prof. M. Salvetti)

1. (facoltativo) Data una molecola con 4 atomi disposti a quadrato, di cui quelli agli angoli opposti sono uguali (vedi figura),

$$\begin{array}{ccc} \bullet & - & \circ \\ | & & | \\ \circ & - & \bullet \end{array}$$

descrivere il gruppo G delle simmetrie della molecola nel piano, dicendo in particolare: che ordine ha G, descrivendone gli elementi, e se G e' abeliano.

2. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x,y) \;=\; \frac{x-y}{x+y}$$

   (a) Descrivere il dominio di f e le sue linee di livello.

   (b) Esiste
   $$lim_{(x,y)\to 0}\ f(x,y)\ ?$$
   (giustificare la risposta).

   (c) Scrivere le derivate prime parziali di f, calcolare il gradiente di f nel punto $P \equiv (2,2)$ e l'equazione del piano tangente al grafico di f in tale punto.

   (d) Dire se esistono punti di massimo e minimo della funzione ed eventualmente calcolarli.

   (e) Minimizzare $f(x,y)$ con la condizione
   $$g(x,y) = x^2 + y^2 - 2(x+y) + 1 = 0.$$

3. Se $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono le funzioni dell'esercizio precedente, calcolare

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

con
$$D = \{(x,y):\ g(x,y) \le 0\}.$$

4. (a) Sia $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Dire se il campo
   $$F = (\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3})$$
   é conservativo e determinarne (in caso affermativo) il potenziale.

   (b) Calcolare il lavoro di F lungo il cammino che unisce $(1,0,0)$ con $(-1,0,0)$ lungo una semicirconferenza giacente nel piano xy.