Esame Istituzioni Matematica II, 3/2/2011 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4
studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 2,3,4
studenti del vecchio ordinamento (prima dei crediti): es: 2,3,4,5

1. Data la molecola C_3 a forma di triangolo equilatero,

   (a) Determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta) Γ del gruppo di simmetria D_{3h} della molecola completando la tabella (I) allegata.

   (b) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)). Dire in particolare, quante sono le frequenze presenti nello spettro IR e quante nello spettro Raman.

2. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x,y) \;=\; \frac{1-x-y}{x^2+y^2}.$$

   (a) Descrivere il dominio di f e le sue linee di livello.

   (b) Dire se esistono i seguenti limiti e calcolarli:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

   e

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$$

   (c) Scrivere le derivate prime parziali di f, calcolare il gradiente di f nel punto $P \equiv (1,0)$ e l'equazione del piano tangente al grafico di f in tale punto.

   (d) Dire se la funzione ha punti critici ed eventualmente classificarli.

   (e) Trovare gli estremi vincolati di $f(x,y)$ con la condizione

$$x-y=0.$$

3. (a) Dimostrare che la forma

$$\omega(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

   é esatta.

   (b) Il campo

$$F(x,y,z) \;\equiv\; \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)$$

   é conservativo? (giustificare la risposta).

(c) Calcolare il lavoro del campo F lungo la semicirconferenza del piano (x, y) definita da

$$\begin{cases} x & = & cos(\theta) \\ y & = & sen(\theta) \\ z & = & 0 \end{cases}$$

$(0 \leq \theta \leq \pi)$,

4. Data la sfera S definita da:

$$S = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

determinare $r > 0$ in modo che l'intersezione tra la sfera S e il cilindro

$$C = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

abbia volume pari alla metá di quello della sfera.

5. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n>0} \frac{n+1}{n^2 - n}.$$

Il gruppo $\mathcal{D}_{3h}$ ha 12 elementi $E,\ \sigma_h,\ 2C_3,\ 2S_3,\ 3C_2',\ 3\sigma_v$ e ha 6 rappresentazioni irriducibili ($A_1^1,\ A_2^1,\ A_1^2,\ A_2^2,\ \ B^1,\ B^2$) con tavola dei caratteri

Γ_i	E	σ_h	$2C_3$	$2S_3$	$3C_2'$	$3\sigma_v$	IR	Ra
A_1^1	1	1	1	1	1	1		x^2+y^2, z^2
A_2^1	1	1	1	1	-1	-1		
A_1^2	1	-1	1	- 1	1	-1		
A_2^2	1	-1	1	-1	-1	1	z	
B^1	2	2	-1	-1	0	0	(x,y)	(x^2-y^2, xy)
B^2	2	-2	-1	1	0	0		(xz, yz)

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale ridotta si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto cui va sottratto 2 e moltiplicando $(u_n-2)*(2cos(\theta)+1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ, si considera il numero u_n' di atomi fissi e si moltiplica $u_n'*(2cos(\theta)-1)$.

	E	σ_h	$2C_3$	$2S_3$	$3C_2'$	$3\sigma_v$
θ	...	...	...	...	...	...
$2cos(\theta)\pm 1$	...	...	...	...	...	...
u_n-2, u_n'	...	...	...	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...	...	...	...

(I)

Numero frequenze IR: ...
Numero frequenze $Raman$:...