Esame Istituzioni Matematica II, 7/9/2010 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4
studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 2,3,4
studenti del vecchio ordinamento (prima dei crediti): es: 2,3,4,5

1. Data la molecola di metano CH_4, a simmetria tetraedrica (con C nel centro e gli H ai vertici del tetraedro regolare)
   (a) Determinare il carattere della rappresentazione totale Γ del gruppo di simmetria T_d della molecola completando la tabella (I) allegata.
   (b) Decomporre la rappresentazione totale Γ (di ordine 15) nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tavola determinata in (1a)).

2. Sia data la funzione di due variabili
$$f(x,y) \; = \; \log(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}).$$
   (a) Descrivere il dominio di f e le sue linee di livello.
   (b) Calcolare, per $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite
$$lim_{(x,y)\to(0,\alpha)} \; f(x,y).$$
   (c) Scrivere le derivate prime parziali di f, calcolare il gradiente di f nel punto $P \equiv (1,1)$ e l'equazione del piano tangente al grafico di f in tale punto.
   (d) Dire se la funzione ha punti critici ed eventualmente classificarli.
   (e) Trovare gli estremi vincolati di $f(x,y)$ con la condizione
$$xy = 10.$$

3. (a) Dire (giustificandolo) se il campo
$$F(x,y,z) \; \equiv \; (xe^{\rho^2}, ye^{\rho^2}, (z+1)e^{\rho^2})$$
   é conservativo, dove $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. In caso affermativo, determinarne un potenziale.
   (b) Calcolare il lavoro del campo lungo il segmento di estremi $(0,0,0)$ e $(3,0,0)$.

4. Dato il disco
$$D = \{(x,y,z): \; x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$
   e il doppio cono
$$C_t \; = \; \{(x,y,z): \; x^2+y^2 = t\; z^2\}, \; t \geq 0$$
   determinare il numero t in modo che risultino uguali i volumi delle due parti in cui C_t divide D.

5. Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n>0} \frac{n+1}{e^n}.$$

Il gruppo $\mathcal{T}_d$ ha 24 elementi $E,\ 8C_3,\ 3C_2,\ 6\sigma_d,\ 6S_4$ e ha 5 rappresentazioni irriducibili $(A_1,\ A_2,\ B,\ F_1,\ F_2)$ con tavola dei caratteri

Γ_i	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B	2	-1	2	0	0
F_1	3	0	-1	1	-1
F_2	3	0	-1	-1	1

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e motiplicando $u_n * (2cos(\theta) + 1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ, si moltiplica $u_n * (2cos(\theta) - 1)$.

	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
θ	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$2cos(\theta) \pm 1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_n	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\chi(R)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(I)