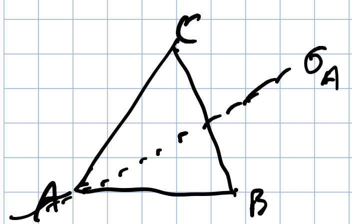
GRUPPI

G gruppo.

def. Due elementi $g_1, g_2 \in G$ si dicono CONIUGATI se $\exists\, h \in G$ t.c. $g_2 = h^{-1} g_1 h$

Es. $G = C_{3v}$ $\quad id,\ R_{\frac{2\pi}{3}},\ R'_{-\frac{2\pi}{3}},\ \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$



oss: la relazione di coniugato è di equivalenza

riflessiva: ogni elemento è coniugato a sé stesso

$$g = (id)^{-1} g (id)$$

simmetrica $\quad g_1 = k^{-1} g_2 k \quad$ chi è k?

se vale $g_2 = h^{-1} g_1 h$ moltiplicando a sinistra per h e a destra per h^{-1}: $\quad h g_2 h^{-1} = g_1$

quindi $k = h^{-1}$ $\qquad g_1 = (h^{-1})^{-1} g_2 (h^{-1})$

transitiva $\quad$ se $g_2 = h^{-1} g_1 h$, $\ g_3 = k^{-1} g_2 k$

$\Rightarrow \quad g_3 = l^{-1} g_1 l \qquad$ chi è l?

$g_3 = k^{-1}(h^{-1} g_1 h) k = (k^{-1}h^{-1})\, g_1\, (hk)$

$k^{-1}h^{-1} = (hk)^{-1}$ verifica:

$(k^{-1}h^{-1})(hk) = k^{-1}(h^{-1}h)k =$

$= k^{-1}\, id\, k = k^{-1}k = id$

---

quindi ho classi di equivalenza per coniugio nel caso C_{3v} chi sono le classi di equivalenza?

$g = h^{-1}\, id\, h = h^{-1}h = id$ $\quad \{id\}$

$R' = h^{-1} R h$ $\quad \{R, R'\}$

$\sigma_B = h^{-1}\sigma_A h$

$\sigma_C = h^{-1}\sigma_A h$ $\quad \{\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$

$$C_{3v} = \{id\} \cup \{R, R'\} \cup \{\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$$

per verificare, prendiamo R e coniughiamolo con tutti i possibili h:

$h = id$ $\quad id^{-1} R\, id = R$

$h = R$ $\quad R^{-1} R R = R$

$h = R'$ $\quad (R')^{-1} R R' = R$

$h = R'$ $\qquad (R')^{-1} R R' = R$

$h = \sigma_A$ $\qquad \sigma_A^{-1} R \sigma_A = R'$

$h = \sigma_B$ $\qquad \sigma_B^{-1} R \sigma_B = R'$

$h = \sigma_C$ $\qquad \sigma_C^{-1} R \sigma_C = R'$

$$h^{-1} \sigma_A h$$

$h = id,\ \sigma_A$ $\qquad = \sigma_A$

$h = \sigma_B$ $\qquad \sigma_B^{-1} \sigma_A \sigma_B = \sigma_B \sigma_A \sigma_B = \sigma_C$

$h = \sigma_C$ $\qquad \sigma_C^{-1} \sigma_A \sigma_C = \sigma_C \sigma_A \sigma_C = \sigma_B$

$h = R$ $\qquad R^{-1} \sigma_A R = R' \sigma_A R = \sigma_B$

$h = R'$ $\qquad (R')^{-1} \sigma_A R' = R \sigma_A R' = \sigma_C$

<u>es</u> T_d ha 24 elementi

$$E = id,\ 8C_3,\ 3C_2,\ 6\sigma_d,\ 6S_4$$

es: verificare che i C_3 sono coniugati,
i C_2 sono coniugati, ecc.

G, G' gruppi. Un <u>omomorfismo</u> di G in G' è un'applicazione $\varphi: G \to G'$

t.c. $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$

<u>isomorfismo</u> è un omomorfismo bigettivo

es: $C_{3v} \underset{\text{isomorfo}}{\cong}$ permutazioni di 3 elementi

---

<u>Gruppi di MATRICI</u>

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ è invertibile } (\Leftrightarrow \det M \neq 0) \}$$

operazione: prodotto righe x colonne.

identità moltiplicativa: $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

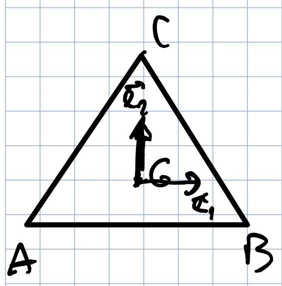
$GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$ formano un gruppo

es: $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\}$

$GL_1(\mathbb{R}) = \{ (a) \mid a \neq 0 \} \longleftrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(è un gruppo rispetto al prodotto)

In $GL_n(\mathbb{R})$ si può avere un sottogruppo finito di matrici..



es:

G baricentro. Fissiamo una base nel baricentro $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

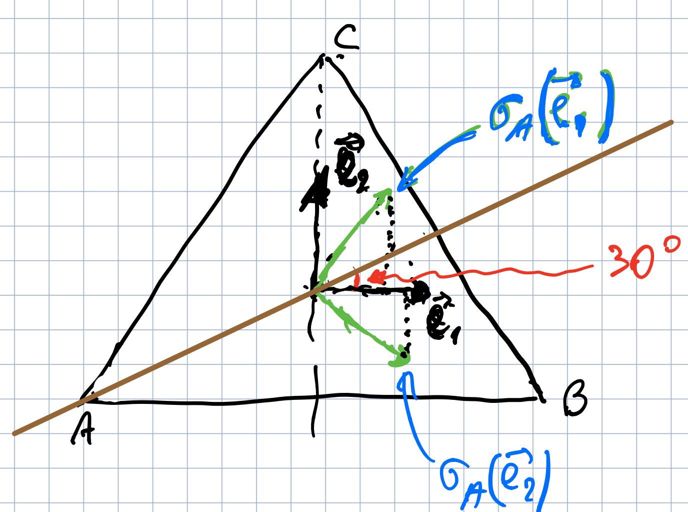
Osserviamo che ogni simmetria fissa il baricentro.

Ad ogni simmetria associamo una trasformazione lineare e quindi la matrice ad essa associata rispetto alla data base $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

$$id: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_A: \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_C: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ecc.



ottengo 6 matrici, che formano un gruppo rispetto al prodotto righe × colonne (isomorfo a C_{3v})

Altro modo per costruire un omomorfismo tra C_{3v} e un gruppo di matrici

$$G = \{ [1] \}$$

$$\varphi : C_{3v} \longrightarrow G \qquad g \to [1]$$

$$\varphi(g_1) = [1], \quad \varphi(g_2) = [1], \quad \varphi(g_1 g_2) = [1]$$

$$\varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) = [1] \cdot [1] = [1]$$

$$G = \{ [1], [-1] \}$$

posso costruire $\varphi : C_{3v} \to G$?

$$\text{proprie} \longrightarrow [1]$$

$$\text{improprie} \longrightarrow [-1]$$

propria ∘ propria = propria   propria ∘ impropria = impropria

impropria ∘ impropria = propria

Def. Una RAPPRESENTAZIONE DI UN GRUPPO G è un omomorfismo $\varphi: G \to GL_n(\mathbb{K})$

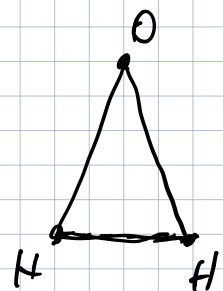
$(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$

esempi:

1) Rappresentazione banale: $\varphi: G \to GL_1(\mathbb{R})$
(o totalsimmetrica) $\varphi(g) = [1]$

2) Rappresentazione segno $\varphi: G \to GL_1(\mathbb{R})$

pari $\to [1]$
dispari $\to [-1]$

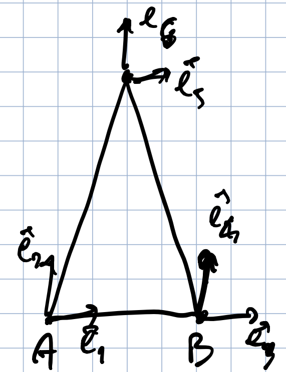


C_{2v} gruppo di simmetrie del triangolo isoscele nello spazio.

C_{2v}	E	C_2	σ_v	σ'_v
E	E	C_2	σ_v	σ'_v
C_2	C_2	E	σ'_v	σ_v
σ_v	σ_v	σ'_v	E	C_2
σ'_v	σ'_v	σ_v	C_2	E

OSS: in un gruppo commutativo ogni elemento è coniugato solo a sé stesso

$$C_{2v} = \{E\} \cup \{C_2\} \cup \{\sigma_v\} \cup \{\sigma_v'\}$$



versori applicati sui vertici

Costruisco una rappresentazione di ordine 6 (ordine della rappresentazione è l'ordine delle matrici associate)

$$id: \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & 0 & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

C_2:

$\vec{e}_1 \longrightarrow -\vec{e}_3$

$\vec{e}_2 \longrightarrow \vec{e}_4$

$\vec{e}_3 \longrightarrow -\vec{e}_1$

$\vec{e}_4 \longrightarrow \vec{e}_2$

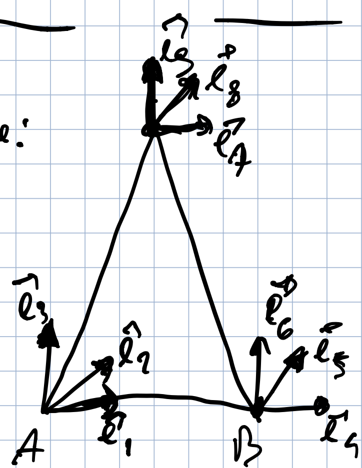
$\vec{e}_5 \longrightarrow -\vec{e}_5$

$\vec{e}_6 \longrightarrow \vec{e}_6$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

σ : .... σ' : ... (completare)

3 versori in ogni vertice:



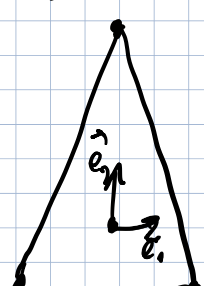
viene una rappresentazione di ordine 9

completare

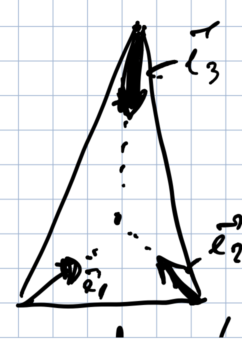
$$C_2 : \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

per esercizio: scrivere le matrici nei seguenti casi:

1)

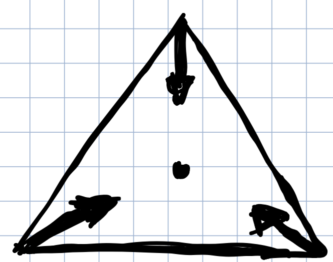


2)



(versori che puntano verso
il baricentro)

3)



stessa cosa per
il triangolo equilatero