10/2/2021

Scrivere chiaramente ogni risposta, riportando solo i conti necessari a giustificarla, iniziando col suo numero: 1,2, 3a, ecc., seguendo la numerazione degli esercizi. Tempo: 2 ore e 1/2.

1. Data la funzione
$$f_a(x,y) = \ xy(x+y-a), \quad a \in \mathbb{R}$$
scrivere (in dipendenza del parametro a) tutti i punti critici di f_a e classificarli (distinguendo tra gli estremi relativi e assoluti).

2. Determinare l'equazione della circonferenza C iscritta nel triangolo T del piano cartesiano avente per lati le rette $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$. Determinare quindi i massimi assoluti vincolati della funzione f_1 del punto precedente (con $a = 1$) sul vincolo C.

3. Dato il campo
$$\vec{F} = x(x+2y-1)\vec{i} + y(y-1)\vec{j}$$
   (a) Dire (giustificandolo) se $\vec{F}$ è conservativo. In caso negativo, trovare un campo conservativo $\vec{G}$ ottenuto da $\vec{F}$ modificandone il coefficiente di $\vec{j}$.
   (b) Calcolare il lavoro di $\vec{F}$ lungo il cammino chiuso determinato dai lati del triangolo T del punto precedente, usando la parte (a).

4. Dato il dominio
$$D(m,r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 - \frac{z^2}{m^2} \le 1,\ 0 \le z \le r\},$$
con $m,\ r$ parametri positivi,
   (a) Calcolare la coordinata z_G del baricentro G del dominio $D(m,r)$
   (b) Dire (giustificandolo) in che intervallo reale è compreso il rapporto z_G/r.

5. Sia data una molecola $ABBB$ con A nell'origine $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ e i B posti nei punti di coordinate $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$, che ha gruppo C_{3v}.
   (a) Nella rappresentazione che si ottiene prendendo 1 versore su ogni atomo che punta verso il baricentro, dire (giustificandolo) qual è il carattere di un elemento C_3 del gruppo.
   (b) Completare la tabella I per il carattere Γ della rappresentazione totale.
   (c) Scrivere la decomposizione di Γ in irriducibili usando la tabella II.

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...
u_n	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...

(I)

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
B	2	-1	0

(II)

1) $$\begin{cases} \frac{\partial f_a}{\partial x} = y(2x+y-a) = 0 \\ \frac{\partial f_a}{\partial y} = x(x+2y-a) = 0 \end{cases}$$

$P_1(0,0) \quad P_2(a,0) \quad P_3(0,a) \quad P_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$

$\frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2} = 2y \qquad \frac{\partial^2 f_a}{\partial x \partial y} = 2x+2y-a \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$

$$H = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2y-a \\ 2x+2y-a & 2x \end{bmatrix}$$

I) $a \neq 0$ ci sono 4 punti critici.

$H(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ è indefinita, quindi P_1 SELLA

$H(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 2a \end{bmatrix}$ è indefinita, quindi P_2 SELLA

$$H(P_3) = \begin{bmatrix} 2a & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$ è indefinita, quindi P_3 SELLA

$$H(P_4) = \begin{bmatrix} 2\frac{a}{3} & \frac{a}{3} \\ \frac{a}{3} & \frac{2a}{3} \end{bmatrix}$$

$\det H(P_4) = \frac{1}{3}a^2 > 0$; se $a > 0$ $H(P_4)$ è def. > 0 MIN, se $a < 0$ $H(P_4)$ è def < 0, MAX. I punti sono estremi relativi perché f assume tutti i valori reali.

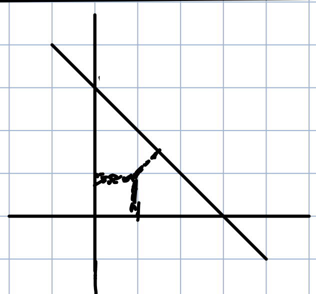
II) Caso $= 0$.

$f_0(x,y) = xy(x+y)$ e l'unico punto critico è $P(0,0)$, in cui $H(P)$ è degenere.

D'altra parte $f_0(x,y) > 0$ nel I° quadrante, e
$f_0(x,y) < 0$ nel III° ", quindi
P è un flesso (il grafico attraversa il piano tangente).

---

2)



Per trovare il centro di C bisogna fare l'incontro delle bisettrici degli angoli; equivalentemente, va trovato un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ che ha la stessa distanza dai lati. Dovrà essere $x_0 = y_0$, e $2\left(\frac{1}{2} - x_0\right)^2 = x_0^2$ che dà $x_0(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = y_0$

Quindi $C: \left(x - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2$

La funzione $f_1 = xy(x+y-1)$ si annulla esattamente sui lati del triangolo, ed è negativa all'interno del triangolo.

Quindi i punti di massimo vincolato di f_1 si hanno nei punti di contatto tra C e il triangolo (in cui f_1 vale 0, mentre f_1 è negativa nei rimanenti punti di C). Tali punti sono $P_1\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}, 0\right)$, $P_2\left(0, \frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)$, $P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

---

3) a) $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$, quindi $\vec{F}$ non è conservativo.

Se poniamo $\vec{G} = \vec{F} + x^2 \vec{j}$ allora le derivate miste sono uguali, $\vec{G}$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi $\vec{G}$ è conservativo.

b) Poiché la curva è chiusa e $\vec{G}$ è conservativo, $\int_{\partial T} \vec{G} \cdot d\vec{r} = 0$

per cui $\mathcal{L} = \int_{\partial T} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial T} \left(\vec{G} - x^2 \vec{j}\right) \cdot d\vec{r} = -\int_{\partial T} x^2 \vec{j} \cdot d\vec{r}$.

Parametrizzando i 3 lati come: (i) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i}$, $0 \le t \le 1$,

(ii) $\vec{r}(t) = (1-t)\,\vec{i} + t\,\vec{j}$, $0 \le t \le 1$

(iii) $\vec{r}(t) = (1-t)\,\vec{j}$, $0 \le t \le 1$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ con

$$\mathcal{L}_1 = -\int_0^1 (t^2 \vec{j}) \cdot \vec{i}\, dt = 0$$

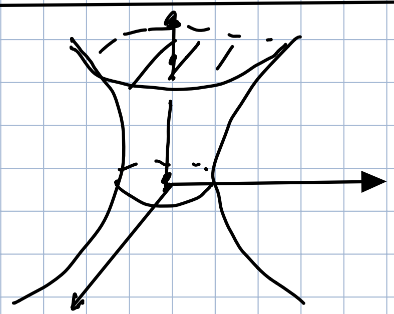
$$\mathcal{L}_2 = -\int_0^1 (1-t)^2 \vec{j} \cdot (-\vec{i} + \vec{j})\, dt = -\int_0^1 (1-t)^2\, dt = -\left[-\frac{(1-t)^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

$$\mathcal{L}_3 = -\int_0^1 (0\cdot \vec{i})\cdot(-j)\,dt = 0 \qquad \text{quindi} \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{3}.$$

---

4) $D(m,r)$

a)



$$x^2+y^2-\frac{z^2}{m^2}=1$$

$$\rho^2 = x^2+y^2 = 1+\frac{z^2}{m^2}$$
sul bordo

$$\text{Vol } D(m,r) = \iiint_{D(m,r)} dV = \pi \int_0^r \left(1+\frac{z^2}{m^2}\right) dz =$$

$$= \pi \left[z + \frac{z^3}{3m^2}\right]_0^r = \pi r \left(1+\frac{r^2}{3m^2}\right)$$

$$\iiint_{D(m,r)} z\, dV = \pi \int_0^r z\left(1+\frac{z^2}{m^2}\right) dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4m^2}\right]_0^r =$$

$$= \frac{\pi}{2} r^2 \left(1+\frac{r^2}{2m^2}\right) \qquad \text{quindi:}$$

$$z_G = \frac{r}{2}\left(1+\frac{r^2}{2m^2}\right)\Big/\left(1+\frac{r^2}{3m^2}\right)$$

b)
$$\frac{z_G}{r} = \frac{1}{2}\,\frac{1+\frac{r^2}{2m^2}}{1+\frac{r^2}{3m^2}}.$$

Il valore $x = \frac{r}{m}$ è >0 e varia in $(0,+\infty)$. La funzione:

$f(x) = \dfrac{1+\frac{1}{2}x^2}{1+\frac{1}{3}x^2}$ la derivata $f'(x) = \dfrac{x\left(1+\frac{1}{3}x^2\right) - \frac{2}{3}x\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)}{\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)^2} =$

$= \dfrac{x}{3\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)^2} > 0$ per $x > 0$.

quindi $f(x)$ è crescente e varia in $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Ne segue $\frac{1}{2} < \frac{z_6}{n} < \frac{3}{4}$

---

5) (a) Un elemento C_3 permuta ciclicamente i B e lascia A invariato. Quindi la matrice associata ha la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ che ha traccia $= 1$.

(b)

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	0	$\frac{2\pi}{3}$	0
$2\cos\theta \pm 1$	3	0	1
u_n	4	1	2
χ	12	0	2

c) $a_1 = \frac{1}{6}\left(12 + 3\cdot 2\right) = 3$

$a_2 = \frac{1}{6}\left(12 - 3\cdot 2\right) = 1$

$a_3 = \frac{1}{6}\left(24\right) = 4$