Compito e compitino 10/1/2023

1) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}$

Dominio: $(x,y) \neq A_1, A_2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{c-x}{((x-c)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x+c}{((x+c)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{((x-c)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y}{((x+c)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -y\underbrace{\left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3}\right)}_{>0} = 0 \Rightarrow y=0$$

quindi dalla prima (con $y=0$):

$$\frac{c-x}{|x-c|^3} = \frac{x+c}{|x+c|^3}$$

può annullarsi solo se $-c < x < c$, da cui:

$$\frac{c-x}{|x-c|^3} = \frac{x+c}{|x+c|^3} \Rightarrow \frac{1}{(c-x)^2} = \frac{1}{(x+c)^2} \Rightarrow c-x = x+c \Rightarrow x=0$$

Si noti che $f(0,y) = \dfrac{2}{\sqrt{c^2+y^2}}$ in $y=0$ ha un max;

nell'intervallo detto

$$f(x,0) = \frac{1}{|x-c|} + \frac{1}{|x+c|} = \frac{1}{c-x} + \frac{1}{x+c} = \frac{2c}{c^2-x^2}$$

ha un min in $x=0$. Quindi $(0,0)$ è una sella.

2) $r_1 + r_2 = h$ dà un'ellisse di fuochi A_1, A_2.

Notiamo: $f(x,y) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} = \frac{h}{r_1 r_2}$ nel vincolo.

Come nell'esercizio dato nel primo compitino, $r_1 r_2$ assume massimo nei vertici dell'ellisse che stanno sull'asse y, e minimo nei vertici che stanno nell'asse x. Siccome qui $r_1 r_2$ sta al denominatore, i punti estremi saranno ancora i vertici dell'ellisse, ma i massimi saranno quelli sull'asse x, i minimi quelli sull'asse y.

3) a) $\operatorname{Vol} D_x = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2hx}\,dx = \pi \left[\frac{e^{-2hx}}{-2h}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2h}$

$y = e^{-hx} \Rightarrow x = -\frac{1}{h} \log y \quad , \quad 0 < y \le 1.$

$\operatorname{Vol} D_y = \frac{\pi}{h^2} \int_0^1 \log^2 y\,dy = \frac{\pi}{h^2} \int_{-\infty}^0 t^2 e^t\,dt = \frac{\pi}{h^2} \left[(t^2 - 2t + 2)e^t\right]_{-\infty}^0$

$= \frac{2\pi}{h^2}$

6) $\langle 1,1 \rangle = \int_{-1}^1 1\,dx = 2 \Rightarrow p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = x - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x\,dx = x$

$\langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \Rightarrow p_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x$

$x^2 - \cancel{\langle x^2, \sqrt{\tfrac{3}{2}}x \rangle \sqrt{\tfrac{3}{2}}x} - \langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{3} = x^2 - \frac{1}{3}$

$\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3} \rangle = \langle x^2, x^2 \rangle - \frac{2}{3} \langle x^2, 1 \rangle + \frac{1}{9} \langle 1,1 \rangle = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,2$

$= \frac{2}{5} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \quad \Rightarrow p_2(x) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$

Dalla formula $f(x) = x = \langle x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n\geq 1} \langle x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \rangle \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$

$$+ \sum_{n\geq 1} \langle x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx) \rangle \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\langle x, 1 \rangle = \int_0^{2\pi} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2$$

$$\langle x, \cos(nx) \rangle = \int_0^{2\pi} x \cos(nx) \, dx = \left[x \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) \, dx = 0$$

$$\langle x, \operatorname{sen}(nx) \rangle = \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen}(nx) \, dx = \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos(nx) \, dx = -\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n} \left[\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \right]_0^{2\pi}$$
$$= -\frac{2\pi}{n}$$

quindi:

$$x = \pi - \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

4) $\operatorname{Dom} f = \{x \neq 0\} \cap \{y^2 + z^2 \neq 0\} = [(\text{semispazio } x>0) \cup (\text{semispazio } x<0)] \setminus \text{asse } x.$

non è connesso (è fatto da 2 aperti separati dal piano $x = 0$)

non è semplicemente connesso: una curva che gira attorno all'asse x non è restringibile a un punto in $\operatorname{Dom}(f)$.

Proviamo a integrare il campo:

$$\varphi(x,y,z) = \int \frac{1}{x^2} \, dx + c_1(y,z) = -\frac{1}{x} + c_1(y,z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{y}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow c_1(y,z) = -\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} + c_2(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial c_1}{\partial z} = \frac{z}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{d c_2}{dz} = \frac{z}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow c_2 = 0 \quad e$$

$\varphi = -\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} + c$ è il potenziale di $\vec{F}$.

5) a) $z = \pm 1$.

Se $z=2$, la molecola ha la simmetria identica e la riflessione σ rispetto al piano contenente l'asse z e il punto di mezzo del segmento tra $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$; quindi il gruppo è $\{id, \sigma\}$ con 2 elementi

6)

C_{3v}	E	$2C_v$	$3\sigma_v$
θ	0	$2\pi/3$	0
$2\cos\theta \pm 1$	3	0	1
u_m	4	1	2
χ	12	0	2

$\Gamma = 3A_1 + A_2 + 4B$

c) $\{id, \sigma\}$ ha due classi di coniugio e quindi 2 rappresentazioni irriducibili di ordine 1: una è quella banale $\begin{cases} id \to [1] \\ \sigma \to [1] \end{cases}$ e l'altra è la segno $\begin{cases} id \to [1] \\ \sigma \to [-1] \end{cases}$

per cui la tabella dei caratteri è

	id	σ
A_1	1	1
A_2	1	-1