18/1/2021

Scrivere chiaramente ogni risposta, riportando solo i conti necessari a giustificarla, iniziando col suo numero: 1,2, 3a, ecc., seguendo la numerazione degli esercizi. [Chi ha giá fatto il compitino deve svolgere solo gli esercizi 4 e 5]
Tempo: 1 ora e 1/2 per il compitino, 2 ore e 1/2 per il compito.

1. Data la funzione
$$f(x,y) = \ cos(2x+y) + \frac{1}{2}y^2$$
scrivere tutti i punti critici di f e classificarli.

2. Fra tutte le ellissoidi di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ che passano per il punto $P \equiv (1,2,3)$, determinare quella avente volume minimo.

3. Dato il campo
$$\vec{F} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}\ \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}\ \vec{j} + \frac{z}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}\ \vec{k}$$
   (a) Descrivere il dominio del campo e dire (giustificandolo) se è semplicemente connesso.
   (b) Dire (giustificandolo) se $\vec{F}$ è conservativo e in caso affermativo calcolarne un potenziale.

4. Data la funzione $z = e^{-ky^2}$, $0 \leq y < +\infty$, dove k è un parametro > 0, sia D_z il dominio dello spazio $\mathbb{R}^3$, con coordinate x, y, z, compreso tra il piano x, y e la superficie ottenuta ruotando il grafico della funzione attorno all'asse z. Sia inoltre D_y il dominio contenuto nel semispazio $y \geq 0$ e delimitato dalla superficie ottenuta ruotando il grafico attorno all'asse y (la parte che contiene il semiasse y positivo).
   (a) Scrivere i domini D_z e D_y in forma matematica:
   $D_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ ....\}$
   $D_y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ ....\}$
   (b) Calcolare il volume di D_z e di D_y e dire quanto deve valere k affinché i due volumi coincidano.
   (c) Calcolare la coordinata z del baricentro di D_z e la coordinata y del baricentro di D_y.

5. Sia data la molecola d'acqua H_2O con O fisso nell'origine $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ e gli H posti nei punti di coordinate $(x,y,0), (x,-y,0) \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Scrivere, al massimo in 3 righe, cosa si intende per rappresentazione totale del gruppo di simmetria della molecola.
   (b) Completare la tabella I per il carattere Γ della rappresentazione totale.
   (c) Scrivere la decomposizione di Γ in irriducibili usando la tabella II.
   (d) Se si vedono x, y come coordinate generalizzate del sistema, scrivere cosa si intende per coordinate normali del sistema.

Γ_i	E	C_2	σ_v	σ'_v
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1

	E	C_2	σ_v	σ'_v
θ	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$2cos(\theta) \pm 1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_n	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\chi(R)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(I)

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = -2 \operatorname{sen}(2x+y) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen}(2x+y) + y = 0$

$$\begin{cases} 2x+y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 0$

$x = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4\cos(2x+y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2\cos(2x+y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos(2x+y) + 1$

$$H = \begin{bmatrix} -4\cos(2x+y) & -2\cos(2x+y) \\ -2\cos(2x+y) & 1-\cos(2x+y) \end{bmatrix}$$

$2x+y = k\pi$: $\quad k$ pari $\quad \cos(2x+y) = 1$

$\quad k$ dispari $\quad \cos(2x+y) = -1$

quindi

k pari $\Rightarrow H = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ sella

k dispari $\Rightarrow H = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ minimo

2) $\mathrm{Vol} = \frac{4}{3}\pi abc$. Basta minimizzare $f(a,b,c) = abc$

con vincolo $\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} = 1$

$$L(a,b,c,\lambda) = abc + \lambda\left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} - 1\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = bc - 2\frac{\lambda}{a^3} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} = ac - 8\frac{\lambda}{b^3} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c} = ab - 18\frac{\lambda}{c^3} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

quindi: $a^3bc = \frac{ab^3c}{4} = \frac{abc^3}{9} \Rightarrow$

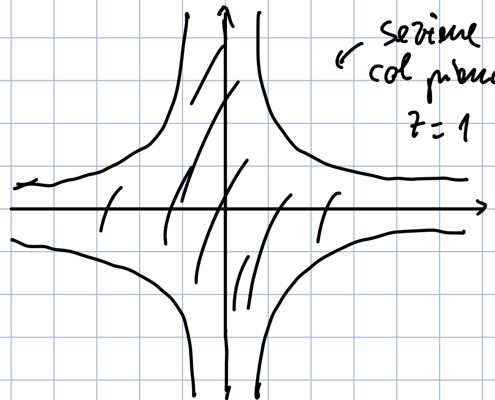
$a^2 = \frac{b^2}{4} = \frac{c^2}{9}$ dall'ultima $\Rightarrow$ $\frac{3}{a^2} = 1$

$\Rightarrow a = \sqrt{3}$

$b = 2\sqrt{3}$

$c = 3\sqrt{3}$

3) a) $D = \{(x,y,z) \mid x^2y^2z^2 < 1 \Leftrightarrow |xyz| < 1\}$



è stellato dall'origine: infatti $(x,y,z) \in D \iff |xyz| < 1$

$\Rightarrow (tx, ty, tz) \in D$ se $0 \le t \le 1$

perché $|tx\,ty\,tz| = |t^3 xyz|$

$= |t|^3 |xyz| < 1$

b) Le derivate miste sono diverse quindi non può essere conservativo.

4)

a) $D_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le e^{-k(x^2+y^2)}\}$

$D_y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \ge 0,\ \sqrt{x^2+z^2} \le e^{-ky^2}\}$

b)

$$\mathrm{Vol}\, D_z = \iiint_{D_z} dV = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-k(x^2+y^2)}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-k\rho^2} \rho\, d\rho = 2\pi \left[-\frac{1}{2k} e^{-k\rho^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{k}$$

$$\mathrm{Vol}\, D_y = \iiint_{D_y} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dy \int_0^{e^{-ky^2}} \rho\, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2ky^2}}{2}\, dy = \frac{\pi}{\sqrt{2k}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\pi}{\sqrt{2k}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi^3}}{\sqrt{8k}}$$

[si è sostituito $\sqrt{2k}\, y = t$, e si è usato $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, visto a lezione]

$\mathrm{Vol}\, D_z = \mathrm{Vol}\, D_y$ se $\quad \frac{\pi}{k} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{8k}} \Rightarrow K = \frac{8}{\pi}$

c) $$z_{G_z} = \frac{\iiint_{D_z} z\, dV}{\mathrm{Vol}\, D_z}.$$

$$\iiint_{D_z} z\, dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \rho\, d\rho \int_0^{e^{-k\rho^2}} z\, dz = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho \frac{e^{-2k\rho^2}}{2}\, d\rho =$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{4k} e^{-2k\rho^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4k}$$ quindi $\quad z_{G_z} = \frac{1}{4}$

$$y_{G_y} = \frac{\iiint_{D_y} y\, dV}{\mathrm{Vol}\, D_y}$$

$$\iiint_{D_y} y\, dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} y\, dy \int_0^{e^{-ky^2}} \rho\, d\rho = 2\pi \int_0^{+\infty} y \frac{e^{-2ky^2}}{2}\, dy =$$

$$= \frac{\pi}{4k}$$

Quindi $$y_{G_y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi K}}$$

3) (i) Se la molecola ha n atomi $A_1, \dots, A_n$, si rappresenta il gruppo di simmetria G della molecola su $\mathbb{R}^{3n}$, scegliendo 3 versori $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_3^{(i)}$ indipendenti, per ogni atomo A_i; la matrice associata alla simmetria A_i si trova esprimendo ogni versore $g(e_j^{(i)})$ in termini dei versori scelti sull'atomo $g(A_i)$.

(ii)

C_{2v}	E	C_2	σ_v	σ_v'
θ	0	π	0	0
$2\cos\theta \pm 1$	3	-1	1	1
u_n	3	1	3	1
χ	9	-1	3	1

$a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$

(iv) L'energia cinetica T è funzione quadratica nelle $\dot{x}, \dot{y}$ ($T = m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ se m è la massa di H). L'energia potenziale V sarà funzione delle posizioni (x,y), $(x,-y)$ e avrà un minimo nelle posizioni di equilibrio (x_e,y_0), $(x_e,-y_0)$. Si prende l'approssimazione al 2° ordine di V negli spostamenti $x-x_0$, $y-y_0$. Le coordinate normali Q_1, Q_2 sono date dai cambiamenti lineari di coordinate che diagonalizzano contemporaneamente T e V.