Compitino 29/11/2021

---

1) Sia $f_a(x,y) = \frac{3}{2}xy - a(x+y) - 2(x^3+y^3)$, $a \in \mathbb{R}$

Per $a \geq 0$, trovare i punti critici della funzione f_a e classificarli.

svolgimento.

$$\begin{cases} \frac{\partial f_a}{\partial x} = \frac{3}{2}y - a - 6x^2 = 0 \\ \frac{\partial f_a}{\partial y} = \frac{3}{2}x - a - \cancel{6}y^2 = 0 \end{cases}$$

---

differenza: $\frac{3}{2}(y-x) + \cancel{6}(y^2-x^2) = 0 \Rightarrow (y-x)(1+4x+4y) = 0$

se $x+y = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ la somma fa: $\frac{3}{2}(x+y) - 2a - 6(x^2+y^2) = -\frac{3}{8} - 2a - 6(x^2+y^2) < 0$

perché $a \geq 0$. Quindi deve essere $x = y$:

$12x^2 - 3x + 2a = 0$ $\quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 96a}}{24}$

$0 \leq a < \frac{9}{96} = \frac{3}{32}$ 2 soluzioni :

date da: $P_1 \equiv \left(\frac{3 + \sqrt{3(3-32a)}}{24}, \frac{3 + \sqrt{3(3-32a)}}{24} \right)$

$P_2 = \left(\frac{3 - \sqrt{3(3-32a)}}{24}, \frac{3 - \sqrt{3(3-32a)}}{24} \right)$

una soluzione se $a = \frac{3}{32}$: $P = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$

nessuna soluzione se $a > \frac{3}{32}$.

$$\frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2} = -12x \qquad \frac{\partial^2 f_a}{\partial x \partial y} = \frac{3}{2} \qquad \frac{\partial^2 f_a}{\partial y^2} = -12y$$

quindi $\det H = 144\, xy - \frac{9}{4}$

Se $a < \frac{3}{32}$, in P_1 $\det H(P_1) = 144\, x^2 - \frac{9}{4} =$

$$144 \left(\frac{3 + \sqrt{3(3-32a)}}{24}\right)^2 - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}\left(\left(3 + \sqrt{3(3-32a)}\right)^2 - 9\right) > 0$$

Inoltre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) < 0$.

quindi P_1 è <u>massimo</u> relativo.

In P_2

$$\det H(P_2) = 144 \left(\frac{3 - \sqrt{3(3-32a)}}{24}\right)^2 - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}\left(\left(3 - \sqrt{3(3-32a)}\right)^2 - 9\right) < 0$$

per $0 \leq a < \frac{3}{32}$

quindi P_2 è punto di SELLA.

Per $a = \frac{3}{32}$

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} . \quad \det H = 0.$$

H ha 1 autovalore < 0 e 1 autovalore nullo.

$$H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad H\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Sviluppando f al terzo ordine, a partire dal punto critico $\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$, nella direzione dell'autovettore relativo all'autovalore nullo, si ottiene:

$$f\left(\frac{1}{8}+h,\frac{1}{8}+h\right)=f\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)+\underbrace{\left\langle\nabla f\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right),(h,h)\right\rangle}_{0}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}(h\ h)\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}h\\h\end{pmatrix}}_{=0}+\frac{1}{6}\left(-12h^3-12h^3\right)=$$

$$=f\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)-4h^3$$

quindi $P\equiv\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$ è un punto di SELLA.

---

2) $x^2+y^2=\frac{1}{2}(x+y)$ $\qquad f=\frac{3}{2}xy-2(x^3+y^3)$

Si noti che il vincolo è una circonferenza di centro $C\equiv\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ e raggio $r^2=\frac{1}{8}$

[infatti è: $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$]

Negli estremi vincolati il gradiente ∇f è un multiplo di ∇g, che è proporzionale a $\left(x-\frac{1}{4},y-\frac{1}{4}\right)$, e quindi è ortogonale al vettore $\left(-\left(y-\frac{1}{4}\right),x-\frac{1}{4}\right)$ che è tangente alla circonferenza (quando $(x,y) \in$ vincolo).

Quindi:

$$-\left(\frac{3}{2}y-6x^2\right)\left(y-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{2}x-6y^2\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$= 6x^2y-6xy^2-\frac{3}{2}\cancel{\left(x^2+y^2\right)}+\frac{3}{2}\cancel{\left(x^2+y^2\right)}-\frac{3}{8}(x-y)$$

$$=(x-y)\left(6xy-\frac{3}{8}\right)$$

Quindi o $x=y$ che dà i punti $A=(0,0)$, $B=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

oppure $xy=\frac{1}{16}$. Questo dà:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\frac{1}{2}(x+y) \Rightarrow (x+y)^2-\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{8}=0$$

Quindi se $s=x+y$ si ha $8s^2-4s-1=0$

$$s=\frac{2+\sqrt{4+8}}{8}=\frac{2+2\sqrt{3}}{8}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

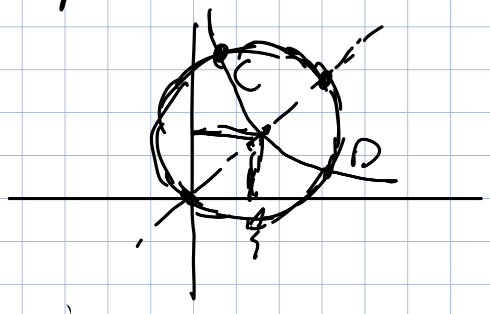
$xy=\frac{1}{16}$ quindi x e y risolvono:

$$z^2-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)z+\frac{1}{16}=0$$

la soluzione col $-$ non c'è perché $x+y<0$ non interseca il vincolo.

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^2-\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{8}}\right)$$

che dà i 2 punti C, D intersezione del vincolo con l'iperbole $xy=\frac{1}{16}$



Si noti che

$$f(x,y)=\frac{3}{2}xy-2\left[(x+y)^3-3x^2y-3xy^2\right]=$$

$$=\frac{3}{2}xy-2\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]=$$

$$=\frac{3}{2}xy-2(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]$$

Quindi in C e D:

$$f(C) = f(D) = \frac{3}{2}\frac{1}{16} - 2\,\frac{1+\sqrt{3}}{4}\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \frac{3}{16}\right] =$$

$$= \frac{3}{32} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{3 - 1 - \sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6}{32}$$

$$= -\frac{4+3\sqrt{3}}{32}$$

$$f(A) = f(0,0) = 0 \quad ; \quad f(B) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} - 2\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8}$$

Quindi A è massimo vincolato, C e D sono minimi vincolati.

---

a) $\vec{F}_a(x,y,z) = \left(axz, (4-a)yz, x^2+y^2\right)$

b) $a=1$, C congiungente $P \equiv (1,0,0)$ con $Q \equiv (-1,0,0)$ mediante la semicirconferenza $C = \{x^2+z^2=1,\ y=0,\ z \geq 0\}$.

c) $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$; $\frac{\partial F_1}{\partial z} = ax$ $\quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = 2x$

$\frac{\partial F_2}{\partial z} = (4-a)y$ $\quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = 2y$.

Quindi per $a=2$ le derivate miste coincidono, essendo il dominio $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso, per $a=2$ $\vec{F}$ è conservativo.

Il potenziale φ verifica $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xz$, quindi $\varphi = x^2 z + c(y,z)$,

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial y} = 2yz \Rightarrow c(y,z) = y^2 z + d(z)$; $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^2+y^2+d'(z) = x^2+y^2$

$\Rightarrow d$ costante ; quindi $\varphi = x^2 z + y^2 z + \text{cost}$.

b)

$$\vec F_1(x,y,z) = (xz,\ 3yz,\ x^2+y^2) = \vec F_2 - \overset{=\vec G}{(xz,\ -yz,\ 0)}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec F_1 \cdot d\vec r = \int_{\mathcal{C}} \vec F_2 \cdot d\vec r - \int_{\mathcal{C}} \vec G \cdot d\vec r = \varphi(-1,0,0) - \varphi(1,0,0) - \int_{\mathcal{C}} \vec G \cdot d\vec r$$

$$= -\int_{\mathcal{C}} \vec G \cdot d\vec r$$

Parametrizziamo $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 0 \\ z = \operatorname{sen} t \end{cases}$; $t \in [0, \pi]$, $\begin{cases} x' = -\operatorname{sen} t \\ y' = 0 \\ z' = \cos t \end{cases}$

$$-\int_{\mathcal{C}} \vec G \cdot d\vec r = -\int_0^\pi -\cos t \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t)\, dt = -\int_0^\pi \cos t \operatorname{sen}^2 t\, dt =$$

$$-\left[\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t\right]_0^\pi = 0$$

[era altrettanto facile fare il conto direttamente]