1) Calcoliamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_{11} x_1 + \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) x_2 + \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) x_3 - b_1 = 0$$
$$= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 - b_1 = 0$$
(perché A è simmetrica)

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 - b_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 - b_3 = 0$$

Quindi $\nabla f(\underline{x}) = \underline{0} \iff A\underline{x} = \underline{b}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = a_{11} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = a_{12} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = a_{13}$$

e in generale $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}$.

Quindi $H = A$.

Se A è non-singolare, allora si ha 1 e 1 sola soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$, data da $\underline{x}_0 = A^{-1}\underline{b}$.
Se A è def. positiva (cioè ha tutti autovalori > 0) allora $\underline{x}_0$ è minimo. Se A è def. negativa, allora $\underline{x}_0$ è massimo, se A è indefinita, $\underline{x}_0$ è sella.

---

2) I punti estremi vincolati stanno tra i valori critici della Lagrangiana $L = f + \lambda g$; questi corrispondono agli ~~x_0~~ del vincolo t.c. $\nabla f(\underline{x}_0)$ è multiplo di $\nabla g(\underline{x}_0)$.
Come visto nel punto 1),

$$\nabla f(\underline{x}_0) = A\underline{x}_0,$$

e inoltre $\nabla g(\underline{x}_0) = \underline{x}_0$. Quindi $\nabla f(\underline{x}) = \alpha \nabla g(\underline{x}_0)$

$\iff A\underline{x}_0 = \alpha \underline{x}_0$, cioè $\underline{x}_0$ è autovettore per A.

Se calcoliamo $f(\underline{x}_0) = \frac{1}{2}\underline{x}_0^T A \underline{x}_0 = \frac{1}{2}\lambda\, \underline{x}_0^T \underline{x}_0 = \lambda$

perché $g(\underline{x}_0) = \frac{1}{2}\underline{x}_0^T \underline{x}_0 - 1 = 0$.

Quindi il minimo vincolato si ha per gli autovettori che corrispondono al minimo autovalore, il max vincolato per quelli che corrispondono al max autovalore.

Se A ha autovalori distinti $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, il min si ha per $\pm \underline{x}_1$, dove $A\underline{x}_1 = \lambda_1 \underline{x}_1$, $\|\underline{x}_1\| = 1$, il max si ha per $\pm \underline{x}_3$, dove $A\underline{x}_3 = \lambda_3 \underline{x}_3$.

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ si ha quindi che il min è preso in $(\pm 1, 0, 0)$, il max in $(0, 0, \pm 1)$.

---

3) Il dominio di $\vec{F}$ è $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < a\}$.
D è dominio convesso, quindi sempl. connesso.
Basta quindi verificare l'uguaglianza delle derivate miste.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2xy}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{\cancel{2}y(-2x)}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2}}$$

Un potenziale sarà:

$$f(x,y) = -y^2\sqrt{a^2-x^2}$$

---

4) In coordinate cilindriche:

$$\mathrm{Vol}\, D(a,r) = 2\int^{2\pi} d\theta \int^{a} d\rho \int^{\sqrt{r^2-\rho^2}} \rho\, dz =$$

$$= 4\pi \int_0^a \rho \sqrt{r^2-\rho^2}\, d\rho = 4\pi \left[-\frac{1}{3}\left(r^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \left(r^3 - \left(r^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

---

5) c) Basta prendere $B_1 \equiv (1,0,0)$, $B_2 \equiv (0,1,0)$, $B_3 \equiv (0,0,1)$

Infatti distanza $(AB_i) = 1$ ovviamente, mentre distanza $(B_iB_j) = \sqrt{2}$.

6)

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	0	$\frac{2\pi}{3}$	0
$2\cos\theta \pm 1$	3	0	1
u_n	4	1	2
$\chi(R)$	12	0	2

$$a_1 = \frac{1}{6}\left(12\cdot 1 + 0\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1\right) = 3$$

$$a_2 = \frac{1}{6}\left(12\cdot 1 + 0\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot(-1)\right) = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{6}\left(12\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 3\cdot 2\cdot(0)\right) = 4$$

$$\Gamma = 3A_1 + A_2 + 4B$$
