Soluzione compitino 2-12-2014

(con alcune note e commenti)

I PARTE

1) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 4t \end{cases}$ $\qquad PQ = \sqrt{20}$

2) $z - f(\sqrt{2}, -1) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{2}, -1)(x - \sqrt{2}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{2}, -1)(y+1)$;

si ha $f(\sqrt{2}, -1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-6x}{2-3x^2+5y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{10y}{2-3x^2+5y^2}$

quindi:

$$z = -6\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) - 10(y+1) = -6\sqrt{2}x - 10y + 2$$

3) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \, 1/y = \frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

quindi $\boxed{D}$

4) $\operatorname{sen}(x+y) = x+y-\frac{1}{3!}(x+y)^3+\dots\dots$

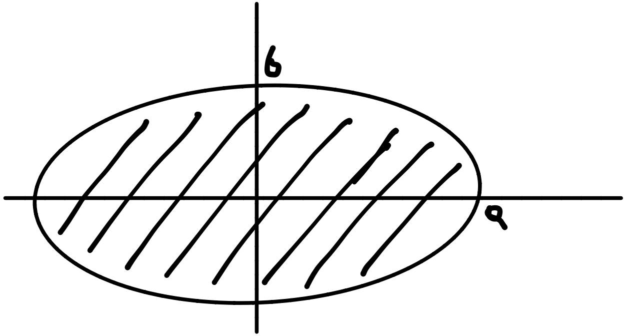
$\cos(x-z) = 1-\frac{1}{2}(x-z)^2+\dots$

quindi al 2° ordine:

$$-1 + x+y + \frac{1}{2}(x-z)^2 = -1+x+y+\frac{1}{2}x^2 - xz + \frac{1}{2}z^2$$

II PARTE

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ è delimitato da un'ellisse di semiassi a, b.



b) Poiché D è chiuso e limitato e f è continua in D, f ha max e min assoluti in D per il teo di Weierstrass.

c) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} - \frac{2x^2/a^2}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\right] = y\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)\Big/\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right] =$$

$$\left(1-2\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$; similmente:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(1-\frac{x^2}{a^2}-2\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$\nabla f = 0$ dentro D se:

$$\begin{cases} y\left(\frac{2x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0 \\ x\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}-1\right)=0 \end{cases}$$

$P_1 = (0,0)$; è interno

$P' = (0, \pm b)$ non è interno a D;

$P'' = (\pm a, 0)$ " " " " ".

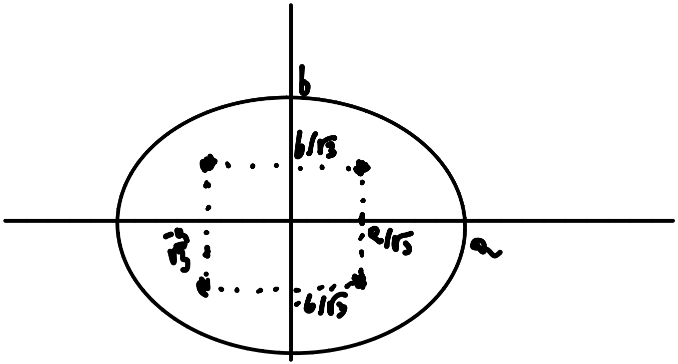
Se sia $x \neq 0$ che $y \neq 0$, si trova:

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{2y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Facendo la differenza: $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2}$

e quindi

$$3\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad , \quad x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}} \quad , \quad y = \pm \frac{b}{\sqrt{3}} \qquad (4 \text{ punti})$$



Calcoliamo il valore di f nei 5 punti trovati: $f(0,0) = 0$,

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = \frac{ab}{3}\sqrt{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = \frac{ab}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{ab}{3\sqrt{3}} \quad (>0)$$

Siccome $f(-x,-y) = f(x,y)$, $f(x,-y) = -f(x,y) = f(-x,y)$

e siccome f vale 0 sul contorno di D, si ha che (per il punto b) $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ sono punti di massimo,

e $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ sono di minimo.

Rimane da vedere $(0,0)$: intuitivamente,

$$xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \sim xy$$ vicino a $(0,0)$, e xy è un punto di sella. Più precisamente:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x + O(x^2)$$ e quindi

$$\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}+O\left((x^2+y^2)^2\right)$$ e quindi:

$$f(x,y) = xy - \frac{x^3 y}{2a^2} - \frac{xy^3}{2b^2} + O\left((x^2+y^2)^2\right)$$

da cui $(0,0)$ è una sella per il criterio dell'Hessiano.

2) Un punto con coordinate (x,y) ha somma delle distanze dagli assi data da $f(x,y) = |x|+|y|$

Per simmetria basta considerare i punti del I quadrante, dove $f(x,y) = x+y$. Usando il metodo di Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x+y+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$ da cui

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1+\dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1+\dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1 = 0 \end{cases}$$

$$x = -\frac{a^2}{2\lambda}$$

$$y = -\frac{b^2}{2\lambda}$$

quindi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1 = \frac{a^2}{4\lambda^2}+\frac{b^2}{4\lambda^2}-1 = 0 \implies$$

$$4\lambda^2 = a^2+b^2 \implies 2\lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2} \implies$$

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(considerando che $x, y \geq 0$)

In questo punto si ha:

$$x+y = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Quindi nei 4 punti $\left(\pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$ la f assume lo stesso valore $\sqrt{a^2+b^2}$.

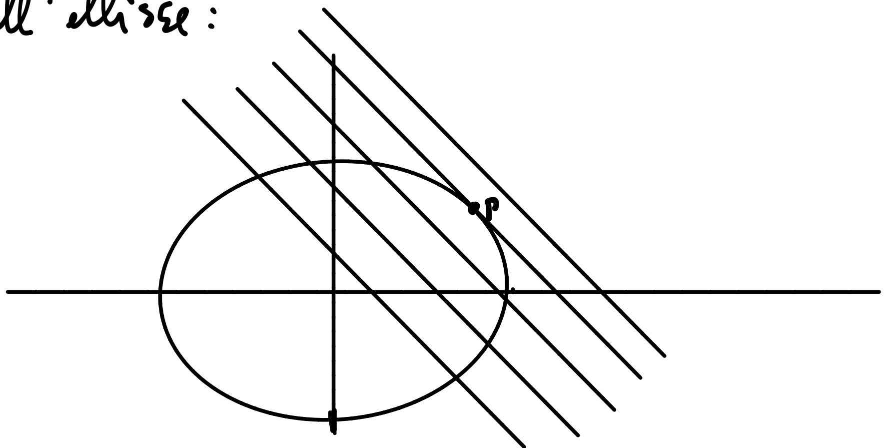
Occorre considerare i 4 punti dove f non è derivabile, cioè le intersezioni dell'ellisse con gli assi cartesiani: $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ (infatti il modulo non è differenziabile in 0).

In $(0, b)$ f vale b, e in $(a, 0)$ f vale a. Supponiamo ad es. $b < a$, allora i 2 punti: $(0, \pm b)$ sono di minimo, e i 4 punti $x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sono di massimo.

(infatti: $a < \sqrt{a^2+b^2}$, $b < \sqrt{a^2+b^2}$)

Se fosse $a=b$ (circonferenza) ci sono 4 punti di minimo $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$.

NOTA: Geometricamente il punto estremo $P \equiv \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ si trova prendendo il fascio di rette parallele $x+y=k$ e considerando (nel I quadrante) le rette del fascio che risulta tangente all'ellisse:



Infatti le $x+y=k$ sono le linee di livello della f (nel primo quadrante) e abbiamo visto che in un punto estremo P dove f è differenziabile si ha che

$\nabla f(P)$ è parallelo a $\nabla g(P)$ (g equazione del vincolo)

e questo equivale a dire che

la linea di livello di f che passa per P è tangente al vincolo

(questo si dimostra, ricordiamo, osservando che $\nabla f(P)$ è ortogonale alla linea di livello di f che passa per P).

3) Calcolando si vede subito che le derivate miste sono uguali. Nel caso i) D non è semplicemente connesso. Si vede che il lavoro su una circonferenza posta nel piano xy e con centro l'origine non è nullo (si è visto questo esempio in aula 2 a lezione) quindi $\vec{F}$ non è conservativo. Nel caso ii) D' è semplicemente connesso (è convesso) e quindi $\vec{F}$ è conservativo per un teo visto. Per il potenziale, chi ha fatto il punto 3 della prima parte: è la funzione che lì appare con segno meno,

$$\varphi(x,y) = -\arctg\left(\frac{x}{y}\right).$$

FACOLTATIVO: Eguagliando le derivate miste si trova:

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-2\varphi \qquad (*)$$

Ricordiamo che se φ è una funzione omogenea di grado α ($\alpha\in\mathbb{R}$) cioè vale: $\varphi(tx,ty)=t^{\alpha}\varphi(x,y)$, $\forall t\in\mathbb{R}$, allora il teorema di Eulero (ottenuto derivando rispetto a t) dà:

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=\alpha\varphi(x,y)$$

Quindi la $(*)$ sopra è soddisfatta da tutte le funzioni omogenee di grado -2 (es: $\varphi(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$). Viceversa, facciamo vedere che se φ soddisfa $(*)$ $\forall(x,y)$ allora è omogenea di grado -2. Consideriamo la funzione $g(t)=\varphi(tx,ty)$ (per (x,y) fissati) otteniamo derivando:

$$g'(t) = x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(tx, ty)$$, quindi:

$$t\, g'(t) = tx \frac{\partial \varphi}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial \varphi}{\partial y}(tx, ty) = [\text{per } (*)]$$

$$= -2\, \varphi(tx, ty) = -2\, g(t)$$

Integrando l'equazione differenziale $t\, g'(t) = -2\, g(t)$ si trova

$$\frac{dg}{g} = -2 \frac{dt}{t}$$ quindi:

$$\int_{g(t_0)}^{g(t)} \frac{1}{g}\, dg = -2 \int_{t_0}^{t} \frac{du}{u} \iff \log \frac{g(t)}{g(t_0)} = -2 \log \frac{t}{t_0} = \log \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}$$

$\iff$

$$g(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2} g(t_0) .$$ Prendendo $t_0 = 1$ si trova

$$g(t) = \varphi(tx, ty) = t^{-2} g(1) = t^{-2} \varphi(x,y)$$

cioè φ è omogenea di grado -2.
