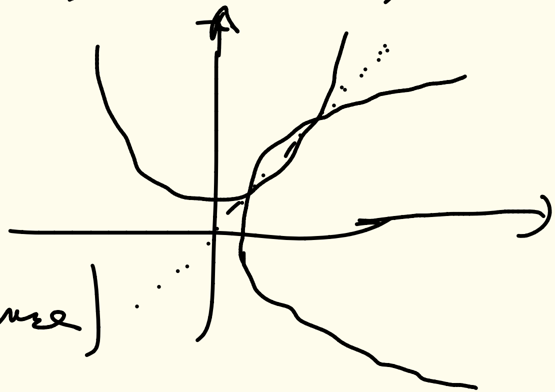
Soluzione (breve) del compitino del 30/11/2018

1) Punti critici di $f_a(x,y) = xy - a(x+y) - \frac{1}{3}(x^3+y^3)$, $a \geq 0$



$$\frac{\partial f_a}{\partial x} = y - a - x^2 = 0$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial y} = x - a - y^2 = 0$$

$$y - x + y^2 - x^2 = 0 \quad \text{(differenze)}$$

$$\Downarrow$$

$$(y-x)(1+x+y) = 0$$

la $x+y=-1$ non dà soluzione (...)

con $x=y$ si trova

$$x^2 - x + a = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} = y$$

Quindi: 2 soluzioni se $a < \frac{1}{4}$, 1 se $a = \frac{1}{4}$

e nessuna se $a > \frac{1}{4}$

$\frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2} = -2x$ $\qquad \frac{\partial^2 f_a}{\partial x \partial y} = 1$ $\qquad \frac{\partial^2 f_a}{\partial y^2} = -2y$. quindi $\det H = 4xy - 1$

Supponiamo ora $a < \frac{1}{4}$.

In $P = \left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ si ha: $a_{11} < 0$, $\det H = 4x^2 - 1$

e tenendo conto che $x^2 = x - a$, $\det H =$

$$4\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2} - a\right) - 1 = 1 - 4a + 2\sqrt{1-4a} > 0$$

quindi P è un massimo

In $Q = \left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ $\qquad a_{11} = -1 + \sqrt{1-4a}$

che è minore < 0 se $a > 0$ $\left(< \frac{1}{4}\right)$ e vale 0 se $a = 0$.

Se $a = 0$ $\det H = -1$ in Q che quindi è una sella.

Se $a > 0$ $\det H = 4\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} - a\right) - 1 = 1 - 4a - 2\sqrt{1-4a} =$

$= \sqrt{1-4a}\left(\sqrt{1-4a} - 2\right) < 0$ quindi ancora Q sella.

Se $a = \frac{1}{4}$ c'è un unico punto critico $P \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $H = 0$

in P. Considerando $g(x) = f_{\frac{1}{4}}(x,x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x^3$ si ha:

$g'(x) = 2x - \frac{1}{2} - 2x^2 = -\frac{1}{2}\left(1 - 4x + 4x^2\right) = -\frac{1}{2}(1-2x)^2 = 0$ solo se $x = \frac{1}{2}$

e tenendo conto che $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ si trova

che $\frac{1}{2}$ è un flesso per $g(x)$, quindi in $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ il grafico

attraversa il piano tangente e il punto è una sella.

2) $L(x,y,\lambda) = xy - \frac{1}{3}(x^3+y^3) + \lambda(x^2+y^2-x-y)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y - x^2 + \lambda(2x-1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x - y^2 + \lambda(2y-1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad x+y-(x^2+y^2)+2\lambda(x+y-1) = 0$$

(facendo la somma)

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2-x-y = 0$$

ma $x^2+y^2 = x+y$ per la 3^a

quindi: $2\lambda(x+y-1) = 0$

Da qui, o $\lambda = 0$, che dà i 2 punti critici di f trovati nel punto precedente, che sono $(0,0)$ e $(1,1)$, oppure $\lambda \neq 0$ e $x+y=1$. Si trovano le soluzioni (intersecando con $x^2+y^2=1$) $(1,0)$, $(0,1)$

Calcolando f nei punti:

$f(0,0) = 0, \ f(1,1) = \frac{1}{3}, f(1,0) = f(0,1) = -\frac{1}{3}$

da cui $(1,0)$, $(0,1)$ sono i minimi assoluti e $(1,1)$ è un max assoluto

3) Deve essere $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ e anche $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$. Se f_1 è il potenziale di $\vec{F} \equiv (f, g)$ allora $\frac{\partial f_1}{\partial x} = f$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = g$ e per f_2 che è il potenziale di $\vec{G} \equiv (g, f)$ si ha:

$\frac{\partial f_2}{\partial x} = g$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = f$. Allora

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = g = \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = f = \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

, cioè si hanno le stesse condizioni e quindi $\vec{F}_1 = (f_1, g_1)$ e $\vec{G}_1 \equiv (g_1, f_1)$ sono conservativi e hanno potenziale f_2, g_2, ecc.

Esempio: $f \equiv 1$; $g \equiv -1$ (costanti). Allora:

$$f_1 = x-y, \quad g_1 \equiv -x+y = -(x-y)$$

$$f_2 = \frac{(x-y)^2}{2}, \quad g_2 \equiv -\frac{(x-y)^2}{2}$$

$$f_3 = \frac{(x-y)^3}{6}, \quad g_3 \equiv -\frac{(x-y)^3}{6}$$

$$f_4 = \frac{(x-y)^4}{4!}, \quad g_4 = -\frac{(x-y)^5}{4!}$$

- - - - -

$$f_n = \frac{(x-y)^n}{n!}, \quad g_n = -\frac{(x-y)^n}{n!}$$