Compito 12/1/2018

Nome e cognome (stampatello) ....;

matricola..............................

PRIMA PARTE

1. (a) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, classificare i punti critici della funzione

$$f_a(x,y) = \ x^2 - log(a + x^2 + y^2), \quad a \in \mathbb{R}.$$

   (b) Determinare gli estremi vincolati della $f_a(x,y)$ dell'esercizio precedente, con $a = 1$, soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

2. Descrivere il dominio del campo

$$\vec{F}(x,y,z) \equiv (\frac{1}{y^2+z^2}, -\frac{2xy}{(y^2+z^2)^2}, -\frac{2xz}{(y^2+z^2)^2})$$

   e dire se è semplicemente connesso. Dire anche se $\vec{F}$ è conservativo e in caso affermativo determinarne un potenziale.

Nome e cognome (stampatello) ....;

matricola.............................

SECONDA PARTE

1. Sia $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ e sia, per $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$,

$$T_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z \le \frac{1}{r^\alpha},\ r \le 1\}.$$

   (a) Sia S_α la parte di T_α sottostante al piano $z = 3$. Calcolare il volume di S_α.

   (b) Dire quali sono le coordinate x, y del baricentro di S_α, argomentando senza fare espliciti conti.
   Calcolare inoltre la coordinata z_α del baricentro di S_α.
   Calcolare $lim_{\alpha \to +\infty}\ z_\alpha$.

   (c) [solo compitino] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$, il volume di T_α risulta finito.

2. Data la molecola con atomi uguali nei punti

$$A_0 \equiv (1, 1, 1),\ A_1 \equiv (1, -1, -1),\ A_2 \equiv (-1, 1, -1),\ A_3 \equiv (-1, -1, 1)$$

   (a) osservare che tutti i lati A_iA_j hanno la stessa lunghezza e quindi la molecola ha forma di tetraedro regolare. Descrivere geometricamente (indicandone l'asse di rotazione e/o il piano di simmetria) una delle operazioni di simmetria di tipo σ_d e una di tipo S_4.;

   (b) determinare il carattere della rappresentazione totale Γ completando la tabella (I) allegata;

   (c) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I));

   (d) [solo compitino]

      i. Dimostrare che il baricentro della molecola è l'origine $(0, 0, 0)$ e che ogni simmetria conserva il baricentro (e quindi induce una simmetria lineare di $\mathbb{R}^3$).

      ii. [facoltativo] Dire se la rappresentazione del gruppo di simmetria su $\mathbb{R}^3$ del punto precedente è irriducibile e in caso affermativo dire (giustificandolo) se risulta equivalente alla F_1 oppure alla F_2 in tabella.

Il gruppo $\mathcal{T}_d$ ha 24 elementi $E,\ 8C_3,\ 3C_2,\ 6\sigma_d,\ 6S_4$ e ha 5 rappresentazioni irriducibili ($A_1,\ A_2,\ B,\ F_1,\ F_2$) con tavola dei caratteri

Γ_i	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B	2	-1	2	0	0
F_1	3	0	-1	1	-1
F_2	3	0	-1	-1	1

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando,

per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $u_n * (2cos(\theta)+1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ, si considera il numero u_n di atomi fissi e si moltiplica $u_n * (2cos(\theta) - 1)$.

	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
θ	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$2cos(\theta) \pm 1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_n	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\chi(R)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(I)