Breve soluzione 28/11/2022.

1) $d(P,Q)$: distanza euclidea. $A \equiv (c,0)$, $B \equiv (-c,0)$, $c>0$.

$f_c(P) = d(P,A)\, d(P,B)$. Se $P \equiv (x,y)$ allora:

$$f_c(x,y) = \sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)} = \sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)} =$$

$$= \sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_c}{\partial x} = \dfrac{2(x^2+y^2+c^2)2x - 8c^2x}{2\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}} = \dfrac{2x(x^2+y^2+c^2-2c^2)}{\sqrt{\ - - -}} = \dfrac{2x(x^2+y^2-c^2)}{\sqrt{}} \\[2ex] \dfrac{\partial f_c}{\partial y} = \dfrac{\cancel{2}(x^2+y^2+c^2)2y}{\cancel{2}\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}} = 0 \end{cases}$$

$P_1 \equiv (0,0)$ $\quad P_{2,3} \begin{cases} y=0 \\ x=\pm c \end{cases}$

Poiché $f_c \geq 0$ e $f_c(P_2) = f_c(P_3) = 0$, chiaramente P_2 e P_3 sono minimi assoluti.

Per P_1: mettendo $x=0$: $f_c(0,y) = \sqrt{(y^2+c^2)^2} = y^2+c^2$ ha un minimo in P_1.

mettendo $y=0$: $f_c(x,0) = \sqrt{(x^2+c^2)^2 - 4c^2x^2} = \sqrt{(x^2-c^2)^2} = |c^2-x^2|$ che ha max locale per $x=0$.

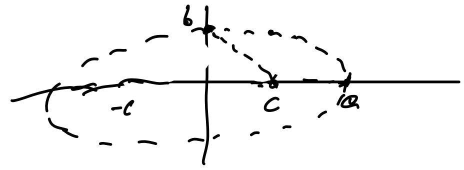
quindi $f_c(x,0)$ ha un massimo in P_1. Ne segue che P_1 è una sella.

---

2) Il vincolo (per $k > 2c$) è un'ellisse con fuochi A e B.

I semiassi sono $b = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - c^2}$

$a = \frac{k}{2}$.



Si ha:

$$\left(d(P,A) + d(P,B)\right)^2 = d(P,A)^2 + d(P,B)^2 + 2\, d(P,A)\, d(P,B)$$

$$d(P,A)\, d(P,B) = \frac{1}{2}\left[\left(d(P,A) + d(P,B)\right)^2 - d(P,A)^2 - d(P,B)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[k^2 - d(P,A)^2 - d(P,B)^2\right]$$

Quindi è equivalente trovare gli estremi di $\frac{1}{2}\left(d(P,A)^2 + d(P,B)^2\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left[(x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2\right] = x^2 + y^2 + c^2 = g(x,y)$$

sull'ellisse (minimi di g corrispondono a massimi di f, e viceversa).

Poiché la funzione g ha chiaramente linee di livello circonferenze di centro l'origine, i massimi e minimi vincolati si trovano nei punti di tangenza di dette circonferenze, cioè in $(\pm a, 0)$, $(\pm b, 0)$.

I punti $(\pm b, 0)$ sono minimi per g, quindi massimi per f; i punti $(\pm a, 0)$ sono massimi per g, quindi minimi per f.

---

3) a) Sappiamo che ruotando attorno all'asse x una funzione $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$, si ottiene un volume dato da

$$\pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

Quindi

$$V(\alpha) = \pi \int_0^1 (1-x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\alpha-1}\, dx = \pi \left[-\frac{1}{\alpha+1}(1-x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}+1}\right]_0^1 = \frac{\pi}{\alpha+1}$$

La funzione $\frac{1}{1+\alpha}$, $\alpha \geq 1$, non è integrabile in $[1,+\infty)$ perché

$$\int_1^c \frac{1}{1+\alpha}\, d\alpha = \left[\log(1+\alpha)\right]_1^c = \log\frac{1+c}{2} \xrightarrow[c\to\infty]{} +\infty$$

b) Da $y = (1-x)^{\frac{1}{2}}$ si ha $x = 1-y^2$; da cui applicando la stessa formula si ottiene

$$W = \pi \int_0^1 (1-y^2)^2\, dy = \pi \left[y - 2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \pi\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}\pi$$

si ha $V(\alpha) = W \iff \frac{\pi}{\alpha+1} = \frac{8}{15}\pi \Rightarrow \alpha = \frac{15}{8} - 1 = \frac{7}{8}$