coordinate, vettori, prodotto scalare, prodotto vettoriale, rette, piani (prof. M. Salvetti)

6th October 2008

(alcune note non complete sugli argomenti trattati).

Si definisce *prodotto scalare* di due vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ il numero reale

$$< \mathbf{v}, \mathbf{w} > = \ \|\mathbf{v}\| \ \|\mathbf{w}\| \ cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}}) \tag{1}$$

dove $\|\mathbf{v}\|$ é la lunghezza del vettore $\mathbf{v}$ e $\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}}$ é l'angolo compreso tra le direzioni positive di $\mathbf{v}$ e di $\mathbf{w}$.
In coordinate: se $\mathbf{v} \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{w} \equiv (x_2, y_2, z_2)$ allora

$$< \mathbf{v}, \mathbf{w} > = \ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \tag{2}$$

Note.

i) L'angolo é compreso tra il minimo di 0, che si ottiene se i due vettori sono collineari e dello stesso senso, e il massimo di π, che si ottiene se sono collineari ma di senso opposto.
ii) Dalla (3) il prodotto di due vettori (non nulli) é zero se e solo se i due vettori sono ortogonali, é positivo se il loro angolo é inferiore a $\pi/2$, é negativo se l'angolo é superiore a $\pi/2$.
iii) Si ha

$$\|v\| = \ \sqrt{< \mathbf{v}, \mathbf{v} >}$$

iv) Il prodotto é *commutativo*:

$$< \mathbf{v}, \mathbf{w} > = < \mathbf{w}, \mathbf{v} >$$

v) Il prodotto é *lineare* in entrambi i fattori:

$$< \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w} > = < \mathbf{v}_1, \mathbf{w} > + < \mathbf{v}_2, \mathbf{w} > ; < \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 > = < \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 > + < \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 >$$

$$< \alpha\mathbf{v}, \mathbf{w} > = < \mathbf{v}, \alpha\mathbf{w} > = \ \alpha < \mathbf{v}, \mathbf{w} >, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Proiezione ortogonale.

Il vettore *proiezione ortogonale* del vettore $\mathbf{v}$ sulla retta direzione del vettore $\mathbf{w}$ si ottiene tramite la formula:

$$pr(\mathbf{v}) \;=\; \left(\frac{<\mathbf{v}, \mathbf{w}>}{<\mathbf{w}, \mathbf{w}>} \right) \;\mathbf{w}$$

Il vettore *proiezione ortogonale* del vettore $\mathbf{v}$ sul piano individuato dai due vettori *ortogonali* $\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2$ si ottiene tramite la formula:

$$pr(\mathbf{v}) \;=\; \left(\frac{<\mathbf{v}, \mathbf{w}_1>}{<\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1>} \right) \;\mathbf{w}_1 \;+\; \left(\frac{<\mathbf{v}, \mathbf{w}_2>}{<\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2>} \right) \;\mathbf{w}_2$$

Il vettore $\mathbf{v}$ é l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti $pr(\mathbf{v}),\ \mathbf{u} = \mathbf{v} - pr(\mathbf{v})$, e la lunghezza di $\mathbf{u}$ dá la distanza tra il secondo estremo di $\mathbf{v}$ e la retta oppure il piano su cui si sta proiettando.

Il *prodotto vettoriale* di due vettori $\mathbf{v},\ \mathbf{w}$ é il vettore $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ con lunghezza

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \;\|\mathbf{v}\|\; \|\mathbf{w}\|\; sen(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}}) \tag{3}$$

direzione ortogonale al piano individuato dai due vettori e verso che segue la "regola della mano destra". In coordinate, se $\mathbf{v} \equiv (x_1, y_1, z_1),\ \mathbf{w} \equiv (x_2, y_2, z_2)$ allora

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} \;\equiv\; \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \right) \tag{4}$$

Tale espressione in coordinate si ottiene anche come sviluppo (per la prima riga) del determinante 3×3

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{5}$$

dove $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ é un riferimento *ortonormale* e *destroso* di vettori.

Note.

i) Anche questo prdotto é lineare in entrambe le componenti

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times \mathbf{w} \;=\; \mathbf{v}_1 \times \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{w}\ ;\ \mathbf{v} \times (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \;=\; \mathbf{v} \times \mathbf{w}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{w}_2$$

$$(\alpha\mathbf{v}) \times \mathbf{w} \;=\; \mathbf{v} \times (\alpha\mathbf{w}) \;=\; \alpha(\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ii) Il prodotto é *anti-commutativo*:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} \;=\; -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

iii) La lunghezza del prodotto vettore $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ é uguale all'area del parallelogramma di lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

iv) Il prodotto di due vettori (non nulli) é il vettore nullo se e solo se i due vettori sono collineari.

Il *prodotto misto* di tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ é il numero

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} > .$$

In coordinate, se

$$\mathbf{u} \equiv (x_1, y_1, z_1), \ \ \mathbf{v} \equiv (x_2, y_2, z_2), \mathbf{w} \equiv (x_3, y_3, z_3)$$

allora il prodotto si esprime come un determinante 3×3 come segue:

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} > = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Note.
i) Segue che se si scambia l'ordine dei vettori si ottiene lo stesso risultato se la permutazione é pari, mentre il segno cambia se la permtazione é dispari.
ii) Il valore assoluto di $< \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} >$ misura il volume del parallelepipedo (in generale obliquo) di spigoli $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Si annulla quindi se i tre vettori sono complanari. Se non sono complanari, il segno é positivo se la terna é destrorsa, é negativo se la terna é sinistrorsa.

Un'equazione del tipo

$$ax + by + cz = d \tag{6}$$

(con almeno uno tra a, b, c diverso da 0) é soddisfatta da tutti i punti di un *piano* nello spazio di coordinate (x, y, z). Considerato il vettore $\mathbf{n} \equiv (a, b, c)$, l'equazione 6 é soddisfatta dai punti $P \equiv (x, y, z)$ tali che

$$< \mathbf{n}, \overrightarrow{OP} > = d \tag{7}$$

e quindi dai punti P tali che il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha prodotto scalare fisso $(= d)$ col vettore $\mathbf{n}$.

Note.
i) Il vettore $\mathbf{n}$ giace su una retta *ortogonale* al piano (6). Variando il parametro d si ottengono tutti i piani paralleli a un dato, e quello passante per l'origine corrisponde al valore $d = 0$.
ii) Un piano nello spazio é individuato da 3 punti non allineati. Dati i punti

$$P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1), \ \ P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2), \ \ P_3 \equiv (x_3, y_3, z_3)$$

l'equazione del piano passante per i tre punti si ottiene uguagliando a zero il determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

che rappresenta il fatto che il vettore $\overrightarrow{P_1P}$ sia complanare coi due vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$.

Una retta r nello spazio 3-dimensionale é individuata dalla conoscenza di due suoi punti. Equivalentemente, r é individuata dalla conoscenza di un punto $P_0 \in r$ e di un suo vettore direzione $\mathbf{v}$. Per un punto qualunque $P \in r$ si ha

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\,\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(questa equazione rappresenta anche un moto rettilineo uniforme del punto P che percorre r a velocitá $\mathbf{v}$, al tempo 0 essendo $P = P_0$).
Se $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ allora il punto $P = P(t)$ ha coordinate (x, y, z) date, al tempo t, da

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\,v_1 \\ y &= y_0 + t\,v_2 \\ z &= z_0 + t\,v_3 \end{aligned} \tag{9}$$

La (9) é detta equazione *parametrica* della retta r. L'equazione *cartesiana* si ottiene considerando la retta come intersezione di due piani: eliminando il parametro t dalla (9) si ottengono le equazioni

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

(si suppone qui che tutti i v_i siano non nulli; le facili modifiche da fare quando qualcuno di essi si annulla sono lasciate al lettore).