Applicazioni lineari e matrici (cenni)
(prof. M. Salvetti)

October 11, 2008

(alcune note non complete sugli argomenti trattati).

Si definisce *applicazione lineare* (in certi casi *operatore lineare*) una funzione $f : A \to B$ tra due "spazi vettoriali" tale che

$$\begin{array}{rclcl} f(x+y) & = & f(x) \; + \; f(y), & & x, \; y \; \in \; A \\ f(\alpha \; x) & = & \alpha \; f(x), & & \alpha \in \mathbb{R}, \, x \in A \end{array} \tag{1}$$

Esempi.
1. L'operatore $\frac{d}{dx}$ è lineare nello spazio delle funzioni derivabili in una variabile reale, e prende valori nello spazio delle funzioni reali.
2. L'operatore di integrazione definita $\int_a^b$ è lineare nello spazio delle funzioni continue nell'intervallo $a, \; b$, e prende valori in $\mathbb{R}$.
3. Ogni funzione lineare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si scrive come

$$f(x) \; = \; c \; x$$

per un fissato numero reale $c \in \mathbb{R}$.
4. Ogni funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si scrive come

$$f(\mathbf{x}) \; = \; A\mathbf{x} \tag{2}$$

dove $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ é il vettore colonna delle coordinate e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

è una matrice 2×2 a coefficienti reali e il secondo membro della 2 è ottenuto per moltiplicazione riga per colonna della matrice A per il vettore $\mathbf{x}$.
5. Ogni funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ si scrive come

$$f(\mathbf{x}) \; = \; A\mathbf{x} \tag{3}$$

dove $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ è il vettore colonna delle coordinate e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

è una matrice 3×3 acoefficienti reali e il secondo membro della 4 é ottenuto per moltiplicazione riga per colonna della matrice A per il vettore $\mathbf{x}$.
6. In generale ogni funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si scrive come

$$f(\mathbf{x}) \;=\; A\mathbf{x} \tag{4}$$

dove $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é il vettore colonna delle coordinate in $\mathbb{R}^n$ e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é una matrice $m \times n$ a coefficienti reali e il secondo membro della 4 é ottenuto per moltiplicazione riga per colonna della matrice A per il vettore $\mathbf{x}$.

Richiami. Un insieme di vettori si dice *linearmente indipendente* se nessuno di essi si esprime come combinazione lineare degli altri. Si chiama *rango* o *caratteristica* di una matrice A il massimo numero di colonne di A che sono *linearmente indipendenti.* Si può dimostrare che se si sostituisce la parola colonne con la parola righe il numero che si ottiene non cambia, per cui il rango di A è al massimo uguale al minimo tra il numero di colonne e il numero di righe di A. Quando la matrice è quadrata di ordine n, il rango è al massimo n, e il rango è n se e solo se il *determinante* della matrice è non nullo.

Riprendiamo l'esempio 5. Il rango di A puo' essere 0, 1, 2 o 3. Se $det(A) \neq 0$ allora il rango di A è 3 e la funzione f associata ad A è *surgettiva,* cioè l'immagine copre tutto $\mathbb{R}^3$. Se $det(A) = 0$ il rango è minore di 3: se è 2, l'immagine è un piano (passante per l'origine), se il rango è 1 l'immagine è una retta (passante per l'origine) e se il rango è 0 l'immagine è il solo punto 0 (l'origine).

Se $g(\mathbf{x}) \;=\; B\mathbf{x}$ è un'altra applicazione lineare, associata a una matrice quadrata B dello stesso ordine di A, la composizione di applicazioni $g(f(\mathbf{x}))$ è anch'essa lineare, e ad essa è associata la matrice prodotto righe per colonne

$$g(f(\mathbf{x})) \;=\; BA\mathbf{x}.$$

Si ha che il $det(A) \neq 0$ se e solo se la matrice A è invertibile: esiste una (e una sola) matrice B tale che

$$AB \;=\; BA \;=\; I \tag{5}$$

dove I è la matrice che ha 1 sulla diagonale principale e 0 altrove (matrice identitá). E' chiaro che I è la matrice associata alla trasformazione identica $i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, cioè si può scrivere $i(\mathbf{x}) = I\mathbf{x}$. La matrice B in (5) si dice l'inversa di A e si denota anche con A^{-1}.

Cambiamento di base (o di riferimento).
Dato un punto origine O e un sistema ortonormale destrorso di vettori di riferimento $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, a un punto P dello spazio si associano 3 coordinate x, y, z che soddisfano

$$\overrightarrow{OP} \;=\; x\mathbf{i} \;+\; y\mathbf{j} \;+\; z\mathbf{k} \tag{6}$$

Che succede se, conservando il punto O, si cambia il riferimento scegliendo un altro sistema ortonormale $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$? Cioè, se P ha coordinate (x, y, z) nel sistema $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, e coordinate (x', y', z') nel sistema $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$, che relazioni ci sono tra i due sistemi di coordinate?
Si ha

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' \tag{7}$$

Esprimiamo il riferimento $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ in temini del $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{i} & = & p_{11}\mathbf{i}' + p_{21}\mathbf{j}' + p_{31}\mathbf{k}' \\ \mathbf{j} & = & p_{12}\mathbf{i}' + p_{22}\mathbf{j}' + p_{32}\mathbf{k}' \\ \mathbf{k} & = & p_{13}\mathbf{i}' + p_{23}\mathbf{j}' + p_{33}\mathbf{k}' \end{array} \tag{8}$$

dove i p_{ij} sono quindi certi numeri reali. Sostituendo le (8) in (7) si ha

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = \\ = x(p_{11}\mathbf{i}' + p_{21}\mathbf{j}' + p_{31}\mathbf{k}') + y(p_{12}\mathbf{i}' + p_{22}\mathbf{j}' + p_{32}\mathbf{k}') + z(p_{13}\mathbf{i}' + p_{23}\mathbf{j}' + p_{33}\mathbf{k}') \\ = (p_{11}x + p_{12}y + p_{13}z)\mathbf{i}' + (p_{21}x + p_{22}y + p_{23}z)\mathbf{j}' + (p_{31}x + p_{32}y + p_{33}z)\mathbf{k}' \end{array}$$

quindi

$$\begin{array}{rcl} x' & = & p_{11}x + p_{12}y + p_{13}z \\ y' & = & p_{21}x + p_{22}y + p_{23}z \\ z' & = & p_{31}x + p_{32}y + p_{33}z \end{array} \tag{9}$$

o anche, in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{10}$$

dove $P = (p_{ij})$ è la matrice dei coefficienti del cambiamento di riferimento.

Si noti che P è una matrice invertibile (quindi con deteminante non nullo): il procedimento analogo in cui nella (8) si esprimono i vettori $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ in termini degli $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ porta a una formula analoga alla (10) in cui compare la matice inversa di P.

Se una funzione lineare f dello spazio euclideo si esprime, nelle coordinate (x, y, z) relative ad un riferimento $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, tramite la

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{11}$$

e si esprime rispetto alle coordinate (x', y', z') relative a un riferimento $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ tramite

$$f \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \tag{12}$$

ci chiediamo qual è la relazione tra le due matrici A ed A'. Supponiamo che i due riferimenti siano collegati dal cambiamento di riferimento (8) (usiamo il prodotto formale riga per colonna)

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] = [\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}']\ P \tag{13}$$

Le matrici A ed A' sono date da

$$[f((\mathbf{i}), f(\mathbf{j}), f(\mathbf{k})] \ = \ [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \ A \tag{14}$$

$$[f(\mathbf{i}'), f(\mathbf{j}'), f(\mathbf{k}')] \ = \ [\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'] \ A' \tag{15}$$

Sostituendo (13) in (14) si trova

$$f([\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'] \ P) \ = \ [\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'] \ P \ A \tag{16}$$

da cui, per linearità

$$f([\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}']) \ P \ = \ [\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'] \ P \ A \tag{17}$$

e sostituendo qui (15)

$$[\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}']) \ A' \ P \ = \ [\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'] \ P \ A \tag{18}$$

da cui deve essere

$$A' \ P \ = \ P \ A$$

o anche, moltiplicando a destra per P^{-1}

$$A' \ = \ P \ A \ P^{-1} \tag{19}$$

che viene detta *formula di cambiamento di base* per le applicazioni lineari.

Esercizio. Nel piano con riferimento $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ si consideri la trasformazione lineare f data dalla simmetria ortogonale rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Sia $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ il riferimento ottenuto dal primo per rotazione di 45° in senso antiorario. Scrivere le matrici associate ad f rispetto ai due riferimenti, scrivere la matrice di passaggio tra i due riferimenti, e verificare la relazione (19).