Gruppi (cenni) (prof. M. Salvetti)

October 23, 2008

(alcune note non complete sugli argomenti trattati).

Definizione di gruppo. *Un insieme di elementi astratti A, B, C, ... in numero finito od infinito e per i quali sia data una legge qualunque di combinazione (o moltiplicazione) mediante la quale risulti definito il prodotto MN di due qualunque elementi dell'insieme, costituisce un gruppo, quando valgono le seguenti quattro proprietà:*

(1^o) *Il prodotto di due qualunque elementi dell'insieme è ancora un elemento dell'insieme.*

(2^o) *Tra gli elementi dell'insieme ne esiste uno, detto identità, che indichiamo con E, tale che, se N è uno qualnque degli elementi, valgono le relazioni: $EN = NE = N$.*

(3^o) *Di ciascun elemento N dell'insieme ne esiste, pure nell'insieme, un inverso, indicato con N^{-1}, e tale che $N^{-1}\ N = N\ N^{-1} = E$.*

(4^o) *Valga la proprietà associativa del prodotto, cioè $A(BC) = (AB)C$ con A, B, C elementi qualunque dell'insieme.*

Esempi. L'insieme dei numeri interi, positivi e negativi, zero compreso, costituisce un gruppo se la legge di composizione è l'addizione; in questo caso l'identità è rappresentata dallo 0, l'inverso di un elemento dato è il suo numero opposto, per es. l'inverso di 5 è -5; mentre non costituisce un gruppo se la composizione è la comune moltiplicazione (l'identità sarebbe data dal numero 1, ma viene a mancare la 3^a proprietà in quanto l'inverso per es. di $+5$ dovrebbe essere $\frac{1}{5}$ che non appartiene all'insieme considerato).

Le rotazioni di un cilindro retto intorno al proprio asse costituiscono pure un gruppo: in questo caso l'identità è rappresentata dalla rotazione nulla, l'inverso di una rotazione oraria è una rotazione antioraria di uguale ampiezza.

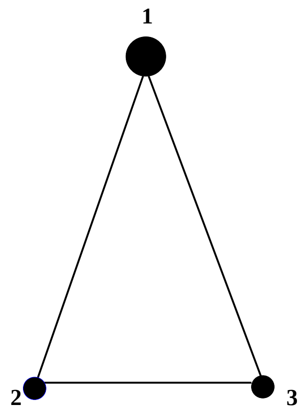
Le operazioni di simmetria che si possono eseguire su un quadrato costituiscono pure un gruppo. Dette operazioni sono 16 e precisamente: l'identità, la rotazione di π intorno ad un asse perpendicolare al piano del quadrato e passante per il punto di incontro delle diagonali; due rotazioni di $\frac{\pi}{2}$, l'una oraria, l'altra antioraria, intorno allo stesso asse; quattro riflessioni per piani passanti rispettivamente per l'asse principale e per i vertici o per l'asse e il punto medio dei lati; le stesse operazioni seguite dall'inversione rispetto al centro di simmetria.

Tutte le matrici quadrate di ordine n aventi determinante non nullo (quindi invertibili), costituiscono un gruppo se si usa come combinazione l'operazione di moltiplicazione riga per colonna (l'elemento identità è la matrice identica, data dalla matrice con 1 sulla diagonale e 0 altrove; l'inverso di una matrice M è la matrice inversa M^{-1}).

Gli elementi che costituiscono un gruppo possono essere in numero finito od infinito: se gli elementi sono in numero finito h, allora il gruppo si dice un gruppo finito *di ordine* h.

In alcuni gruppi vale anche la proprietà commutativa $AB = BA$: essi prendono allora il nome di gruppi *abeliani*. Ricordiamo tuttavia che in generale è $AB \neq BA$.

Tabella di moltiplicazione di un gruppo. Dato un gruppo risulta molto utile costruirsi la relativa tabella di moltiplicazione. Per fissare le idee, consideriamo la figura geometrica costituita da tre sfere ai vertici di un triangolo isoscele. Numeriamo i tre punti con $1, 2,\ 3$ come indicato nella figura sotto.



Questa figura rimane uguale a se stessa se su essa vengono eseguite le seguenti sei operazioni:
1) l'identità E che lascia la figura inalterata;
2) la rotazione di π intorno alla retta passante per il vertice 1, e perpendicolare alla base $2 - 3$ nel suo punto di mezzo. Questa operazione la indicheremo con C_2;
3) la riflessione attraverso il piano passante per i centri delle tre sfere e che indichiamo con σ_V;
4) la riflessione attraverso il piano indicato in 2) e perpendicolare al piano sopra ricordato. Questa operazione la indichiamo con σ'_V.

Si usa dire che la figura possiede un *asse binario* e due piani di simmetria perpendicolari tra loro e passanti per l'asse binario (questo gruppo si denota anche con C_{2V}).

La tabella di moltiplicazione del gruppo è la seguente:

$*$	E	C_2	σ_V	σ'_V
E	E	C_2	σ_V	σ'_V
C_2	C_2	E	σ'_V	σ_V
σ_V	σ_V	σ'_V	E	C_2
σ'_V	σ'_V	σ_V	C_2	E

Come si vede dalla tabella, che è simmetrica rispetto alla diagonale principale, questo gruppo è abeliano. Nella tabella di moltiplicazione di un gruppo ogni riga (così come ogni colonna) contiene *tutti* gli elementi del gruppo permutati. Questo deriva dal fatto che in un gruppo vale la *legge di cancellazione* sia a destra che a sinistra:

$$\text{se } AB = AC \text{ allora } B = C, \text{ se } AC = BC \text{ allora } A = B\ .$$

Infatti, nella prima basta moltiplicare ambo i membri a sinistra per A^{-1} e usare gli assiomi, nella seconda si moltiplicherà a destra per C^{-1}.

Esercizio 1 *(a). Scrivere la tabella di moltiplicazione del gruppo delle simmetrie del piano che preservano un triangolo equilatero.*
(b). Scrivere la tabella di moltiplicazione del gruppo delle simmetrie dello spazio che preservano un triangolo equilatero.

Rappresentazioni di un gruppo mediante matrici. Un insieme di matrici quadrate di ordine n si dice che costituisce una *rappresentazione* di un gruppo G, quando segue la stessa tabella di moltiplicazione del gruppo considerato. In altri termini, ad ogni elemento del gruppo si fa corrispondere una matrice quadrata di ordine n, in modo che, se agli elementi A, B del gruppo corrispondono le matrici M, N, allora al prodotto AB corrisponde la matrice prodotto righe per colonne MN. L'ordine delle matrici si dice anche ordine della rappresentazione.

Si noti che, se all'elemento A del gruppo corrisponde la matrice M, all'inverso A^{-1} deve corrispondere la matrice inversa M^{-1}, quindi le matrici della rappresentazione sono tutte matrici invertibili (a determinante non nullo). All'identità del gruppo corrisponde la matrice identica di ordine n.

Esempi. La rappresentazione *total simmetrica* è quella che fa corrispondere ad ogni elemento del gruppo la matrice identica di ordine 1.

Si può costruire una rappresentazione del gruppo C_{2V} sopra scritto considerando come si trasforma un sistema di vettori opportunamente associato al triangolo. Ad esempio si prende un sistema di versori ortogonali $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$ con origine nel punto di mezzo dell'asse del segmento $2-3$ e con $\overrightarrow{x}$ rivolto lungo tale segmento, orientato nel verso che va dal punto 2 al punto 3, $\overrightarrow{y}$ ortogonale al piano del triangolo e $\overrightarrow{z}$ nel piano del triangolo che punta verso il punto 1. Si ottiene la seguente rappresentazione di ordine 3, che associa agli elementi E, C_2, σ_V, σ'_V rispettivamente le matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una rappresentazione di ordine 2 si ottiene considerando come si trasformano i vettori $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$. Si ottengono le matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2 *(i). Si scriva una rappresentazione di ordine* 3 *del gruppo considerato nell'esercizio 1, (a), e una per il gruppo considerato nell'esercizio 1, (b). (ii). Si scriva la tabella di moltiplicazione del gruppo "delle permutazioni" di tre oggetti* 1, 2, 3. *Tale gruppo ha ordine* 6 : *si dimostri che si possono ordinare gli elementi del gruppo in modo che la tabella di moltiplicazione sia la stessa del gruppo dell'esercizio 1,(a).*